

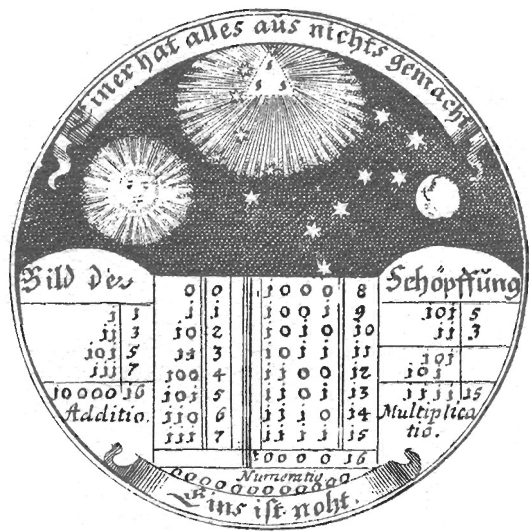
regulas ad Multiplicationes ubi unq. patet univ. fact.  
sing. op. prof. Num. univ. op. ex Tabula Pythagorica.  
hoc tot. ex multiplicata nullum alium multiplicationem, iam notat  
pope proponens. Tamen enim habetur univ. aut. sig. loc.

# Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins

... perforata ... et ut primum aperiri. et f. claud.  
... aperte in locis respondentibus ipse 1. causa manet  
... respondentes ipse 0. per loca aperta deponat  
... orbiculos in crenas per alios m. et  
... de columnis in columnas perforatas ut  
... orbiculos creas representent columnas nec  
... ex una crena in aliam ire nisi  
... m. m. ubi globuli effluent  
... super in crenas deinde super uno qui in brevis  
... manet si quidem per portam  
... ut in crena uterque al. aut. tunc  
... recipit, alioquin non effluent;

Divisio in hoc calculo fit tum sine tabula  
pythagorica, tum etiam sine lentatione

... compendioso ...  
... 1010 ... 1000 ...



Der 14. November 1966 brachte die 250. Wiederkehr des Todestages von *Gottfried Wilhelm Leibniz* einem der größten Denker der Menschheit.

Mit diesem Buch sei vor allem des Mathematikers Leibniz gedacht, der die Aufmerksamkeit der wissenschaftlichen Welt auf das duale Zahlensystem lenkte, das zu einem wesentlichen Element der datenverarbeitenden Maschinen unserer Zeit geworden ist.

HERRN VON LEIBNIZ' RECHNUNG MIT NULL UND EINS



*Hoc duce in immensi penetravimus intima veri,  
Nec probat autorem menti magis ulla Deum.*

*Bernardus*

*Herrn*  
*von Leibniz'*  
Rechnung  
mit Null und  
Eins

*Zweite, durchgesehene Auflage*

SIEMENS AKTIENGESELLSCHAFT

*Zur Vignette auf dem Einband* Die Abbildung auf dem Einbanddeckel gibt die Rückseite eines Medaillendentwurfes wieder, den Leibniz seinem vom 2. Januar 1697 datierten, an den Herzog Rudolf August zu Braunschweig und Lüneburg gerichteten Brief beigefügt hatte. Das Original des Briefes existiert nicht mehr, ein eigenhändiges Konzept wird in der Niedersächsischen Landesbibliothek in Hannover aufbewahrt.

Der Brief ist von Rud. Aug. Noltenius, Adv. Wolfenb., veröffentlicht und bei Johann Christian Langenheim, Leipzig, im Jahre 1734 im Druck erschienen. – Leibniz erläutert in diesem Brief dem Herzog das von ihm entdeckte dyadische Zahlensystem, das einerseits Sinnbild der Schöpfung sei (»weil die leere Tiefe und Finsternis zur Null und Nichts, aber der Geist Gottes mit seinem Lichte zum Allmächtigen Eins gehört«), andererseits große Bedeutung für die Wissenschaft habe.

## INHALTSÜBERSICHT

Vorwort

7

*Erich Hochstetter*

Gottfried Wilhelm Leibniz

11

*Hermann J. Greve*

Entdeckung der binären Welt

21

*Heinz Gumin*

Die mathematischen Grundlagen  
der Dualzahlen  
und ihre Bedeutung für die Technik  
der Datenverarbeitung

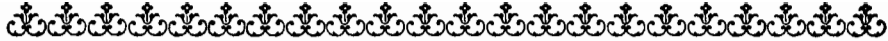
33

Übersetzungen  
der Faksimiledrucke

42







## Vorwort

Das Jahr 1966 bringt die 250. Wiederkehr des Todestages von Gottfried Wilhelm Leibniz, der am 14. November 1716 in Hannover starb und dort seine letzte Ruhestätte fand.

Man sagt oft, daß Leibniz der Gelehrte gewesen sei, der das Wissen seiner Zeit noch voll in sich vereinigt habe. Das mag so gewesen sein. Aber diese Aussage verdeckt etwas die Tatsache, daß er eigentlich auch als einer der ganz großen Schöpfer geschätzt zu werden verdient. Leibniz ist in vielem den Gedanken seiner Zeit voraus gewesen. So auch auf einem wichtigen Gebiet der Wissenschaften, der Mathematik. Hier zählt er zu den Großen durch die Erfindung der Differentialrechnung – mag der Streit mit Newton um die Priorität auch einige Schatten werfen. Jedenfalls hat er zahllose Abhandlungen in allen mathematischen Disziplinen geschrieben ... Mathematik begann gerade die Mode-Wissenschaft zu werden.

Meistens waren es die Philosophen, die auf ihn aufmerksam wurden; sie führten im ganzen folgenden Jahrhundert das große Wort. Doch die Zeit war noch nicht reif für das, was Leibniz konzipierte, was er als Logiker

wollte. Ihm ist nämlich an der Erfindung der Differentialrechnung klar- geworden, was ein Kalkül zu geben vermag; und so hat er von hier aus weitergeforscht, hat an Logik-Kalküle gedacht und an den Zusammenhang mit schärferen Sprachen, als es die natürlichen Sprachen sind, an Dinge also, die ein Zentrum unserer heutigen Bemühungen im Zusammenhang mit informationsverarbeitenden Maschinen sind.

Diese sehr weitreichenden Gedanken kommen oft zu wenig zur Geltung in der Einschätzung Leibniz' gegenüber seinen Leistungen, die später als Grundlage der Rechenmaschine dienten, und insbesondere seiner Einführung der Dualzahlen. Aber wie alles bei Leibniz haben diese Dinge ihren tiefen philosophischen Ursprung: bei der Rechenmaschine die Überzeugung, daß die »Routine«-Arbeit – wie wir heute sagen würden – des Menschen unwürdig sei, bei der Dualzahl der Gedanke, daß die Welt aus der Gegensätzlichkeit zweier Prinzipien besteht, daß es das Nichts, die Null, und das Sein, ein Zeichen, gibt.

An dieser Stelle sei noch auf die im Buch benutzte Terminologie hingewiesen. Leibniz verwendete in seinen Schriften häufig den Ausdruck »binär«. Entsprechend dem literarischen Vorbild wurde daher in dem Beitrag »Entdeckung der binären Welt« auch dann der Terminus »binär« verwendet, wenn dafür heute der Begriff »dual« üblich ist. Es ist dabei zu beachten, daß das Wort »binär« nicht grundsätzlich durch das Wort »dual« ersetzt werden darf, wie die Beispiele »binäre Arithmetik« und »binäre Formen« deutlich machen.

München, November 1966

## Vorwort zur zweiten Auflage

Intuition hat einen großen Denker, seiner Zeit weit voraus, ein Zahlensystem – das Binärsystem – schöpfen lassen, dessen Aufbau damals nicht vorauszusehenden Erfordernissen der Datenverarbeitungstechnik unserer Tage in überraschender Weise entspricht. Gottfried Wilhelm Leibniz hat diesen äußeren Zweck als innere Bestimmung seines Systems bereits erahnt und gesucht.

Zahlentheoretische Studien am Zweiersystem haben inzwischen zu unmittelbarem Nutzen beim Aufbau von Datenverarbeitungsanlagen geführt. Viele Anlagen arbeiten heute vorteilhaft intern mit Binärzahlen und setzen für den Verkehr nach außen diese in Dezimalzahlen um.

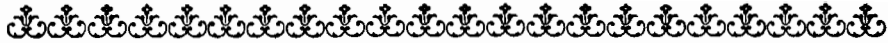
Der Vorteil der Binärzahlen liegt zunächst darin, daß die Grundrechnungsarten und die Rechenoperationen einfacher als in anderen Zahlensystemen werden, wobei der an sich unbequeme größere Stellenaufwand bei maschinellen Operationen unbedeutend wird. Wesentlich ist aber auch, daß sich die binären Zahlen mit unseren technischen Mitteln so einfach darstellen lassen: Spannung ein oder aus, Ja- oder Nein- Entscheidungen entsprechen einander in ursprünglicher Weise.

Der Dank gilt den Autoren, die uns mit ihrer Arbeit halfen, das Buch „Herrn von Leibniz' Rechnung mit Null und Eins“ herauszugeben, mit dessen Darstellung wir breiten Anklang fanden.

Mit Bedauern haben wir während der Vorbereitungen zur zweiten Auflage zur Kenntnis nehmen müssen, daß Herr Prof. Dr. Hochstetter verstorben ist. Dieses Buch ist ein Zeichen dankbarer Erinnerung an diesen so verdienstvollen Wissenschaftler.

München/Erlangen, Juli 1969





# Gottfried Wilhelm Leibniz

1646 - 1716

*Erich Hochstetter*

**M**an hat ihn oft einen Polyhistor, einen Vielwisseur, genannt. Sein Geist erschien manchem als ein Gefäß mit reichem, mannigfaltigem Inhalt. Die Philosophiegeschichte zählte ihn unter ihre führenden Köpfe. Aber auch die Geschichte der Mathematik beanspruchte ihn für sich als den Erfinder der Infinitesimalrechnung, auch der Analysis der Lage u. a. Die moderne Geschichtswissenschaft sieht in seiner Geschichte des Welfenhauses Anfänge der damals neuen Methoden einer kritischen Historie. So zählen ihn auch noch andere Disziplinen zu den ihren. Aber er ist in allen diesen Gebieten nicht nur ein aufnehmender Geist gewesen. Leibniz hat in weitem Rahmen überall schöpferisch mitgewirkt mit eigenen Erkenntnissen oder zumindest bedeutsamen Anregungen. Ihre letzten Auswirkungen haben z. T. bis in unsere Gegenwart hinein Früchte getragen, deren Möglichkeit er sogar voraussah – das alles gibt ihm die Größe, die man einem bloßen Polyhistor nicht zubilligen könnte.

In seiner Zeit, dem 17. Jahrhundert, konnte das bloße Wissen allein den tätigen Mann nicht befriedigen. Dieser von Einfällen und Gedanken über-

strömende Kopf Leibnizens hing im letzten immer realisierbaren Plänen nach, mit deren Ergebnissen er dem »gemeinen Besten« dienen konnte. Dabei erschien ihm die Beschränkung auf eine einzelne Frage als geradezu widernatürlich.

Als er mit 15 Jahren begann, in Leipzig die Rechtswissenschaft zu studieren, entsprach er der Tradition seiner Familie. Das Ziel seines Studiums war damals eine Stellung in der Heimatstadt und ihrer Universität. Gegen den Brauch aber war, daß man dem Zwanzigjährigen nach Abschluß seiner Studien die Zulassung zur Promotion zum Doktor der Jurisprudenz angeblich wegen seiner Jugend, vielleicht aber aufgrund von Intrigen, verweigerte. So übersiedelte er nach Altdorf bei Nürnberg, wo er zum Doktor der juristischen Wissenschaften promoviert wurde.

Leibniz hat damals den Weg in eine ungewisse Zukunft der sicheren Professur vorgezogen. Die Überlegung, daß es für einen jungen Mann unzweckmäßig sei, sich schon so früh in einer Stellung festzusetzen, ohne sich zuvor in der Welt umgesehen zu haben, war gewiß ein glaubwürdiger Grund. Bei der Offenheit seines Geistes und der Weite seiner Interessen, die er schon damals besaß, scheute er wohl vor der Enge professoraler Lehrverpflichtungen zurück. Brauchte er doch Zeit für seine Weiterbildung und Möglichkeiten für die Ausführung von Plänen, die nicht in den Bereich eines juristischen Professors fielen.

So reiste er im Spätsommer 1667 von der alten Reichsstadt Nürnberg über Frankfurt nach Mainz, wo er ein Rheinschiff nach Holland besteigen wollte. Aber in Mainz wurde ihm vom dortigen Kurfürsten, der ihn »ohne jede Empfehlung« empfangen hatte, die Mitarbeit an einer Neuordnung des Römischen Rechts angeboten. Das war eine Aufgabe, die seinen eigenen kritischen Gedanken zur zeitgenössischen Rechtsordnung entgegenkam. So faßte er schnell frühere eigene Meditationen und Vortragstexte ergänzend zu einer kleinen bedeutsamen Schrift über die Reform des juristischen Studiums zusammen. Er widmete und überreichte sie dem Kurfürsten, um damit nicht nur sein großes Interesse, sondern auch seine Eignung für den

Plan einer Rechtsreform zu bezeugen. Seine Absicht, sich in der Welt umzusehen, gab er aber damit nicht auf.

In Mainz war die Bekanntschaft mit dem ehemaligen kurmainzischen Kanzler Johann Christian von Boineburg, die er 1668 gemacht hatte, von sehr großem Interesse und Nutzen für ihn. Denn der junge Leibniz in Mainz war noch nicht »der große Leibniz«, wie er später genannt werden sollte. Damals war er noch der geniale Anfänger, der lernen wollte und mußte. Es war ein Glück für ihn, daß er während seines Mainzer Aufenthalts in Boineburg einen sehr gebildeten, klugen und erfahrenen Staatsmann fand, der ihn in die Fragen der großen Politik, die Sorgen um das Reich und in die Aufgaben der Länder wie auch in das in Mainz schon vor seiner Ankunft lebhaft diskutierte Problem der Reunion der Kirchen einführte.

Am gleichen Ort (Bad Schwalbach), wo er einen politischen Entwurf mit Boineburg besprach, entwarf er auch eine erste Formulierung seiner naturphilosophischen Spekulation, angeregt durch die von dem großen holländischen Physiker und Mathematiker Christiaan Huygens und dem Engländer Sir Christopher Wren veröffentlichten Thesen über die Bewegungsgesetze. In derselben Zeit verfaßte er auch die ersten Entwürfe seiner »Elemente des Naturrechts« und die des Zivilrechts. Wohl aus Gesprächen mit Boineburg gingen ferner theologische Untersuchungen hervor, darunter auch ein erster Versuch zum Theodizee-Problem. Auch entstand in dieser frühen Zeit schon ein erster Plan für eine deutsche Sozietät der Wissenschaften. Durch seine Bekanntschaft mit dem Mainzer Münzmeister hatte er Gelegenheit, an alchimistischen Experimenten mit kritischer Aufmerksamkeit teilzunehmen.

Boineburg bahnte ihm auch den ersehnten Weg in die »große Welt«. Auf seine Anregung entwarf Leibniz seinen sogenannten »Ägyptischen Plan«, mit dem er Frankreichs militärische Macht von Europa weg zu einem Angriff auf Ägypten hinlenken sollte. Um diesen Plan dem französischen König selbst vorzutragen, auch um Geldforderungen Boineburgs einzutreiben, schickte ihn dieser nach Paris, das damals noch das geistige Zen-

trum Europas war. Was aber Leibniz selbst wollte, war, sich in diesem Treffpunkt der europäischen Gelehrten weiterzubilden, Wissenschaftler kennenzulernen und insbesondere dem großen Jansenistenführer Antoine Arnauld persönlich zu begegnen, der ihm in seiner Fähigkeit, christliche Frömmigkeit und exakte Wissenschaft zu verbinden, als ein Vorbild erschien. Auch hoffte er, sich mit seinen naturphilosophischen Schriften, seiner Untersuchung über die Möglichkeit der Eucharistie und dem Entwurf einer Rechenmaschine einen Namen zu machen und möglichst dort eine wissenschaftliche Stellung zu finden. Von seiner Rechenmaschine für alle Grundrechnungsarten bis zu sechsstelligen Zahlen hatte er damals erst den Entwurf bei sich. Aber er hoffte, in Paris geeignete Mechaniker für die Herstellung zu finden. Daß er schließlich doch nur ein sehr unvollkommenes Modell vorzeigen konnte, ist ihm nicht anzurechnen in einer Zeit, in der ihm nur wenige Feinmechaniker erreichbar waren. So hat es bis 1694 gedauert, ehe die erste Maschine wirklich fertig war. Diese soll aber noch bis etwa 1920 benutzbar gewesen sein.

Der Aufenthalt in Paris (mit einem kurzen Besuch in London) war für Leibniz von ernster Arbeit erfüllt. Er bot ihm auch manche Enttäuschungen. Die Royal Society in London hatte ihn zu ihrem Mitglied gewählt, die Académie des Sciences in Paris aber nicht. Die Begegnung mit Christiaan Huygens ließ ihn die Unzulänglichkeit seiner bisherigen mathematischen Kenntnisse spüren. Das war ihm Anlaß, sich nun sehr eingehend in die höhere Mathematik zu vertiefen. Und bald erwies sich auch hierbei der eben noch Lernende zwei Jahre später als Meister: 1675 erfand er die Infinitesimalrechnung, auf eigenem Wege und völlig unabhängig von Newtons Fluxionsrechnung. In der gleichen Zeit etwa begannen seine ernsteren Bemühungen, in die Schriften von Descartes selbst einzudringen; auch hörte er aus mündlichen Berichten schon so viel von dem noch unveröffentlichten Hauptwerk des großen holländischen Philosophen Spinoza, daß er seine – kritische – Stellungnahme dazu schon schriftlich fixieren konnte. Vorher hatte er bereits einen neuen Versuch einer Theodizee zu



Papier gebracht. In diesen Jahren hat ihn ein ausgesprochenes Begnadungsbewußtsein erfüllt. Und doch blieb ihm der äußere Erfolg in Paris versagt. Den erhofften Platz in der Pariser Akademie erhielt er nicht, noch irgendeine andere Stellung, und so zwang ihn 1676 Geldmangel, die Großstadt mit ihrer Fülle von Anregungen zu verlassen und die ihm schon mehrfach angebotene Stelle als Hofrat in Hannover anzunehmen.

Auf der Reise dorthin fuhr er noch einmal nach London. Dann besuchte er Spinoza in Den Haag. Ende November 1676 traf er in Hannover ein. In der kleinen Residenz wird ihm bewußt worden sein, daß er Paris nicht nur Kenntnisse, die sich von der Physik, Mathematik, Philosophie, Geschichte, Politik bis zur Technik der Glasfabrikation und des Eisengusses erstreckten, verdankte. Vor allem hatte sich in Paris sein geistiger Horizont geweitet, sein zuvor immer etwas ungewandtes Auftreten war sicherer geworden, und die vielen mündlichen Diskussionen wurden jetzt in einem sich von Jahr zu Jahr ausweitenden Briefwechsel fortgesetzt. In diesem ersten Jahrzehnt an seiner neuen Wirkungsstätte verfolgte Leibniz mehrere bedeutsame Pläne. Vor allem wollte er die schon in Mainz konzipierte Idee einer Universalwissenschaft ausführen. Er versuchte, jede wissenschaftliche Aussage zu formalisieren mit Hilfe von Symbolen für die einzelnen Begriffe, um damit eine der Mathematik analoge Gewißheit zu erreichen. Zur gleichen Zeit etwa (Ende Januar/Anfang Februar 1678) gelangte er durch eigene Experimente und Berechnungen zu der Annahme der Erhaltung der Kraft (oder Energie, wie er später sagte), wobei er noch  $m v^2$  als konstant setzte. Aber diese Arbeiten schienen ihm doch nicht zu genügen, um sich seinem Landesherren als ein nützlicher Mann zu erweisen. Das aber war eine Notwendigkeit in seiner damaligen Lage. So kam es, daß Leibniz damals seinem Herzog die Ausführung seines Planes anbot, die schwierige Wasserregulierung in den Harzbergwerken durch von Windmühlen betriebene Pumpen besorgen zu lassen. Jahre und Monate hat Leibniz mit dieser Arbeit im Harz verbracht und verbraucht. Das große technische Unternehmen mißlang. Aber die dafür aufgewandte Zeit hatte am Schluß

ein ganz anderes, sehr viel bedeutsameres Ergebnis für die Philosophie. In der Stille dieser langen Winterabende im Harz, um die Jahreswende 1685/86, verfaßte er das für seine metaphysische Spekulation grundlegende kleine Werk, das er allerdings nicht selbst veröffentlichte: den Mitte des 19. Jahrhunderts in seinem Nachlaß gefundenen »Discours de métaphysique«.

Noch ein anderer Gedanke ist in diesem ersten Jahrzehnt in Hannover in ihm gereift, der die Jahrhunderte über unbeachtet blieb und erst heute zu voller Auswirkung gekommen ist: seine »Dyadik« oder binäre Arithmetik, d. h. der Ersatz des gebräuchlichen dekadischen Zahlensystems durch die Darstellung aller Zahlen nur mit den Ziffern 0 und 1. Er behauptete, den Einfall dazu schon sehr viel früher gehabt zu haben, aber keinesfalls von der »Tetractys« betitelten Schrift seines einstigen Lehrers in Jena, Erhard Weigel, abhängig zu sein, die in der Tat ganz andere Ziele verfolgt hatte.

Der Öffentlichkeit blieben diese Pläne, abgesehen von gelegentlichen brieflichen Mitteilungen, unbekannt. Nur von dem Mißerfolg im Harzbergbau erfuhr man. Er drohte vor allem seine Stellung am Hofe zu gefährden. Daß Leibniz diese Gefahr nicht gering geschätzt hat, ersieht man aus der Größe des Angebotes, mit dem er sie zu parieren gewußt hat: er wollte die Geschichte des Welfenhauses schreiben. Daß ihm diese große Aufgabe schließlich eine schwere Last sein würde, konnte er wohl nicht ahnen. Sie festigte jedoch seine Stellung, indem sie ihm die Zusicherung einer lebenslänglichen Pension einbrachte. Seine Welfengeschichte wird auch heute noch als eine historische Leistung für seine Zeit anerkannt. Aber wie viele Pläne und Entwürfe konnte er nicht ausführen, wieviel Angefangenes mußte er unvollendet lassen, weil die historische Arbeit ihm die Zeit dazu nahm!

Zeit – die er einmal das kostbarste Gut genannt hatte, das Gott den Menschen gegeben habe – verwandte er auch auf die jahrelangen Verhandlungen über die Reunion der Kirchen.

Aus seiner tiefen Religiosität heraus hat er sein Leben lang versucht, die Ergebnisse der modernen Wissenschaft mit dem Christentum zu verein-

baren. Er erstrebte also das Gegenteil dessen, was später die sogenannte »Aufklärung« erreicht hat. Daher ist die verbreitete Rede, Leibniz sei der »Vater der Aufklärung« gewesen, unberechtigt. Hatte er doch so früh schon ihre Gefahren gesehen, daß er bereits 1704 eine aus dem Bruch zwischen Religion und Wissenschaft resultierende große Revolution vorausgesagt hatte, die dann 1789 auch wirklich ausbrach. Die Vereinbarkeit von Glaube und Wissenschaft und die Einheit des Glaubens unter allen Völkern erschienen ihm als die einzige Möglichkeit, zu einem dauernden Frieden in der Welt zu gelangen.

Der Verbindung der Völker und damit dem Frieden sollten auch die wissenschaftlichen Akademien dienen, für deren Gründung er schon seit Mainz Pläne erwogen hatte. Ihre eigentliche Aufgabe sah er darin, daß sie als geistige und kulturelle Zentren der einzelnen Völker über die politischen Grenzen hinweg zusammenarbeiten sollten. Aber nur die Gründung der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin hat er erreichen können.

Berlin war für Leibniz zunächst mehr als nur der Sitz der Akademie. Herrschte dort doch bis zu ihrem allzu frühen Tode (1705) als Preußische Königin Sophie Charlotte, die Tochter des hannoverschen Kurfürsten Ernst August und seiner Gemahlin Sophie. Und so wie diese eine sehr wohlwollende, kluge, in mehr als dreißigjähriger höfischer Verbundenheit bewährte Gönnerin des einsamen Leibniz gewesen ist, so schätzte ihn die geistig lebendige und interessierte junge Königin, die er schon als Kind gekannt hatte, wie einen alten Lehrer. Die Güte Gottes, der Ursprung des Übels sowie die Veröffentlichungen von Pierre Bayle, einem der Väter der Aufklärung, waren Inhalt lebhafter Unterhaltungen. Der Nachwelt blieb als Ergebnis dieser Jahre ein Buch, das einzige größere Werk, das Leibniz selbst hatte drucken lassen: die 1710 anonym erschienene »Théodicée«, welche die mit der toten Königin besprochenen Themen noch einmal aufnahm.

Was Leibniz schon in der Jugend erstrebt hatte, in den Dienst des Kaisers zu treten, glückte ihm am Ende seines Lebens. Allerdings war seinen Versuchen, einen Platz im Reichshofrat zu erhalten, die er auf seiner im Inter-

esse der Welfengeschichte unternommenen Italienreise bei der Durchreise durch Wien gemacht hatte, kein Erfolg beschieden. Damals (1687/88) hatte er seine Akademiepläne zwar fördern können, ohne jedoch einen Abschluß und eine feste Stellung für sich zu erreichen. Inzwischen war Kurfürst Ernst August gestorben, und sein Nachfolger Georg Ludwig hatte zu wenig Format, um für einen Mann wie Leibniz Verständnis zu haben. Daher reiste dieser 1712 ohne Genehmigung des Kurfürsten zunächst zu einer zweiten Begegnung mit dem Zaren Peter dem Großen, der ihm den Titel eines russischen Geheimen Justizrats verliehen hatte, und dann weiter nach Wien. Es waren keine schönen Monate für den »großen Mann«, als der er schon seit einigen Jahren in der gelehrten Welt bezeichnet wurde. Er mußte sich, schon alternd, um Stellungen bewerben, sei es als besoldeter Reichshofrat, sei es als Kanzler von Siebenbürgen oder als Direktor der neu zu gründenden Akademie der Wissenschaften. Man feilschte an den maßgeblichen Stellen zeitweilig mit ihm um Taler, da er natürlich ein seinen bisherigen Einkünften angemessenes Einkommen brauchte. 1713 gewährte ihm der Kaiser dann den besoldeten Platz im Reichshofrat und ernannte ihn zum Direktor der zu gründenden Akademie.

Als einen Gewinn dieses letzten Wiener Aufenthalts hat Leibniz aber auch die Begegnung mit dem Prinzen Eugen von Savoyen, dem kaiserlichen Feldherrn, angesehen. Politisch stimmte dieser mit ihm überein in der Überzeugung von der Notwendigkeit der Stärkung der Reichsmacht. Wissenschaftlich zeigte er Interesse für Leibniz' Philosophie. Das veranlaßte Leibniz, eine kleine, populärer gehaltene Darstellung seiner Gedanken, die »Principes de la nature et de la grâce«, zu verfassen und dem Prinzen zu überreichen, der sie sich sorgfältig aufbewahrt hat. Im gleichen Zeitraum schrieb er auf Bitten eines französischen Philosophen eine gleichfalls gekürzte, aber strengere Übersicht seiner Metaphysik, die später so genannte »Monadologie«.

Im September 1714 kehrte Leibniz nach Hannover zurück. Dort war inzwischen seine alte Gönnerin, die Kurfürstin Sophie, verstorben. Der Kur-

fürst Georg Ludwig hatte den englischen Thron bestiegen, der Hof mit seinen vielen Auslandsverbindungen war nach London übergesiedelt. So war Hannover langweiliger und isolierter von der übrigen Welt als zuvor. Was Leibniz vorfand, war ein Reiseverbot des Königs und ein Sekretär mit dem geheimen Auftrag, seine Arbeiten an der Welfengeschichte zu überwachen. Mit dieser sehr unköniglichen Geste dachte der König einen ihm weit überlegenen Geist »bestrafen« zu können. Das Reiseverbot hat Leibniz ignoriert und ist noch einmal mit dem Zaren in Pyrmont zusammengetroffen. Auch hat er die Anfertigung eines zweiten Exemplars seiner Rechenmaschine für den Zaren besorgen lassen und die Welfengeschichte bis zu dem vorgesehenen Abschnitt zu Ende geführt.

Aber mit der Erfüllung dieser Aufgabe, die ihm jahrzehntelang »wie ein Mühlstein am Halse gehangen« hatte, und somit der Erreichung des lang ersehnten Zieles, Hannover verlassen zu können, riß offenbar die innere Spannung seines Lebens gleichsam ab, die ihn bisher aufrechterhalten hatte. Nach einer kurzen, nicht näher festgestellten Krankheit griff der Tod am 14. November 1716 nach dem alten Mann, der einsam, ohne eine pflegende Hand ein Leben beschloß, das groß und ebenso reich an Arbeit wie arm an Freude gewesen war. Erst vier Wochen später durfte er beigesetzt werden, in der üblichen Form, jedoch ohne Teilnahme des Hofes und der Stadt.





## Entdeckung der binären Welt

*Hermann J. Greve*

Obwohl mehr als ein Vierteljahrhundert vergangen ist, entsinne ich mich noch gut des Gefühls einer gewissen Verwirrung, das mich befiel, als ich zum erstenmal von der Existenz anderer Zahlensysteme neben dem vertrauten Zehnersystem erfuhr. Man schien uns etwas Wichtiges vorzuenthalten, uns in dem Glauben gelassen zu haben, allein mit dem Dezimalsystem könne man die rechnerische Seite des Lebens meistern. Nunmehr hatte es den Nimbus der Alleinherrschaft verloren. Es war nur ein Zahlensystem unter anderen.

So las ich es damals in dem Büchlein »Vom Einmaleins zum Integral«, das ich aus purer Neugier erstanden hatte. Das »Einmaleins« war geläufig, aber das »Integral« in Vergessenheit geraten. Da nun beide so freundschaftlich nebeneinander angeboten wurden, schien es eine willkommene und leichte Gelegenheit, diese Wissenslücke zu schließen.

Es kam anders, als ich beim Durchblättern auf den Satz stieß: »Der große Leibniz hat im Jahre 1690 in Rom sogar das merkwürdigste aller Systeme, das Zweiersystem (Dyadik oder binarische Arithmetik), entdeckt, das sich

überhaupt nur der Null und Eins als Ziffern bedient.« Das Ganze schien unerklärlich, und daß überdies der »große Leibniz« es der Mühe wert erachtet hatte, sich mit nur zwei Ziffern zu beschäftigen, machte alles noch geheimnisvoller. Es begann ein fast abenteuerlicher Weg zu kleinen und großen Entdeckungen in einer bis dahin verschlossenen Welt.

Ein Geheimnis! Das war zunächst alles, was ich vom Zweiersystem wußte. Wen sollte nicht reizen, es zu entziffern? Das Zehnersystem wies die ersten Schritte. Ich begann, es mit neuen Augen zu sehen.

Das uns beigebrachte Zählen beruht auf den zehn Ziffern 0, 1, 2, 3 usw. bis 9, wobei die Null eine Sonderstellung einnimmt, da sie nur im Zusammenhang mit anderen Ziffern zum Zählen geeignet ist. Ist es nicht verblüffend, daß jede dieser Ziffern eine andere Bedeutung erhält, wenn sie in einer Zahl die Stelle wechselt? Betrachten wir z. B. die vier Ziffern 0, 2, 3 und 9. Aus ihnen lassen sich 24 verschiedene Zahlen zusammensetzen, die addiert zu der ansehnlichen Summe 93324 anwachsen. Begnügen wir uns mit der höchsten und der niedrigsten der 24 möglichen Kombinationen, also mit 9320 und 0239 (der Einfachheit halber 239 geschrieben). Wir wollen versuchen, die mit ihrer Stellung innerhalb der Zahl wechselnden Werte zu bestimmen:

9320 oder

$$\begin{array}{r}
 9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 1000 = 9000 \\
 + 3 \cdot 10^2 = 3 \cdot 100 = 300 \\
 + 2 \cdot 10^1 = 2 \cdot 10 = 20 \\
 + 0 \cdot 10^0 = 0 \cdot 1 = 0 \\
 \hline
 \text{zusammen wie oben } \underline{\underline{9320}}
 \end{array}$$

0239 oder

$$\begin{array}{r}
 0 \cdot 10^3 = 0 \cdot 1000 = 0000 \\
 + 2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 100 = 200 \\
 + 3 \cdot 10^1 = 3 \cdot 10 = 30 \\
 + 9 \cdot 10^0 = 9 \cdot 1 = 9 \\
 \hline
 \text{zusammen wie oben } \underline{\underline{0239}}
 \end{array}$$

Von dieser buntschillernden Seite hatte ich unser Zehnersystem noch nicht kennengelernt. Da nimmt man vier Ziffern, stellt sie beliebig zusammen, und jede erhält einen anderen Wert. Einmal ist die 9 nur neun wert,



ein anderes Mal tausendmal mehr. Die größte Zahl aus den gleichen vier Ziffern ist fast 39mal größer als die niedrigste. Vieles andere zeigte sich bei den zahlreichen Kombinationen. Das nüchterne und langweilige Rechnen gewann auf einmal Leben. Ziffern und Zahlen wurden munter und beweglich, plusterten sich auf und schrumpften zusammen, fügten sich zu kuriosen Figuren und wirbelten wieder davon. Ich spürte einen Hauch Verwandtschaft mit Walt Disney. Würde der unvergeßliche Zauber seines Films »Die Wüste lebt« erhalten geblieben sein, wenn nicht die Kraft seiner poetischen Vision in der leblosen Einöde des Sandmeeres ein Wunderland verborgener Schönheit entdeckt hätte?

Doch zurück zu unserem Zehnersystem! Der Stellenwert jeder Ziffer beruht also auf Potenzen von Zehn, und zwar in von rechts nach links ununterbrochen aufsteigender arithmetischer Reihe der Exponenten. Der höchste Exponent ist immer um Eins geringer als die Anzahl der Stellen. Zu wissen ist nur noch, daß jede Zahl, mit Null potenziert, Eins ergibt.

Das alles gilt auch für das Zweiersystem. Natürlich kennt es nicht zehn, sondern nur zwei Ziffern, Null und Eins. Und der Wert der einzelnen Stellen wird durch Potenzen von Zwei bestimmt. Versuchen wir das Zweiersystem an einer beliebigen Zahl dieses Systems, z. B. 101101, zu erproben. Da wir nun einmal an das Zehnersystem glauben, wollen wir ihren Wert in diesem System bestimmen.

$$\begin{array}{r}
 101101 \text{ läßt sich auch darstellen:} \quad 1 \cdot 2^5 = 1 \cdot 32 = 32 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0 \cdot 2^4 = 0 \cdot 16 = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 1 \cdot 2^3 = 1 \cdot 8 = 8 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 0 \cdot 2^1 = 0 \cdot 2 = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{zusammen} \quad \underline{\underline{45}}
 \end{array}$$

Die Zahl 101101 des Zweiersystems entspricht also der Zahl 45 des Zehnersystems.

Warum befassen wir uns überhaupt mit dem Zweiersystem, und warum hat Leibniz es getan? Zwischen unserer Zeit und jener, in die Leibniz' Leben und Wirken gestellt war, finden wir erstaunliche Parallelen. Sie berühren weniger das Maß des Erreichten, aber sie sind erkennbar beim Vergleich der geistigen Haltung der Eliten, der Wegbereiter des Fortschritts. Die Leibnizische Art des Denkens, seine Forschungsmethoden sind modern, von höchster Aktualität. Sein Streben beschränkte sich nicht darauf, Vorhandenes zu registrieren und zu analysieren. Es überflutete unablässig die Ufer wissenschaftlicher Erkenntnisse und drang, getrieben von unstillbarem Verlangen nach dem Unerforschten, dem Neuen, in unbekannte Gebiete vor. Die schöpferische Phantasie seines Genies ließ ihn eine Welt erahnen und vorbereitend gestalten, deren reale Existenz in ferner Zukunft lag.

Wenn nicht alles täuscht, stehen wir am Beginn einer Epoche, der eine junge Wissenschaft, die das Wesen von Steuerung und Regelung der Naturvorgänge und ihre Nutzenanwendung für die Wohlfahrt der menschlichen Gesellschaft zu untersuchen sich anschickt, das Gepräge geben wird. Die Menschheit ist auf dem Wege, eine neue Welt zu erobern, eine höherwertige, anspruchsvollere Technik beherrschen zu lernen. Wäre Leibniz unser Zeitgenosse, so wäre sein Platz in diesem Forschungsraum.

An dieser Stelle wollen wir Stafford Beer, einen der jüngeren enthusiastischen Wegbereiter der Kybernetik, zu Wort kommen lassen. »In der Informationstheorie benutzt man die Basis 2. Dies reduziert unser Denken auf einfachste Begriffe – das Problem der Selektion erscheint hier als Ja-Nein-Entscheidung zwischen zwei Seiten einer Alternative. Offensichtlich kann diese zweiwertige Entscheidung durch ein Zahlensystem ausgedrückt werden, das statt zehn nur zwei Werte hat. Bit – eine Abkürzung des englischen ›binary digit‹ – ist der Standardbegriff für eine Informationseinheit.«

In den elektronischen Rechenanlagen hat die erste Phase der Kybernetik und damit die verbreitete Anwendung der aus der Informationstheorie gewonnenen Erkenntnisse ihren uns geläufigsten Ausdruck gefunden. In

diesen kybernetischen Systemen wird bei der Verarbeitung und Speicherung eingegebener oder als Zwischenergebnisse ermittelter Informationen ausschließlich die binäre Darstellung angewandt. Hierfür gibt es mehrere Gründe. Einer der sinnfälligsten und überzeugendsten ist der, daß sie in idealer Weise die beiden stabilen Zustände reflektiert, die durch den elektrischen Strom herbeigeführt werden können. So finden wir das binäre oder duale Zahlensystem, das Leibniz vor fast 300 Jahren über einen langen Zeitraum hinweg immer wieder beschäftigt hat, als wesentliches Element der technisch höchstentwickelten Maschinen unserer Zeit wieder.

In diesem Zusammenhang stoßen wir auf ein Phänomen, das nicht ohne weiteres verständlich ist. Leibniz hat den unbestreitbaren Ruhm, als erster die binäre Arithmetik entdeckt, systematisch dargestellt und die wissenschaftliche Öffentlichkeit seiner Zeit mit ihr bekannt gemacht zu haben. Aber von dieser Geistestat nimmt unsere Zeit keine Notiz. So sehr die kybernetischen Forscher bereit sind, bei Leibniz »die erste Belebung kybernetischer Gedankengänge anzusetzen«, so sehr vernachlässigen sie seine Arbeiten über die binäre Arithmetik. Norbert Wiener, der Mitbegründer der Kybernetik, weiß keinen besseren Schutzpatron für seine Wissenschaft als Leibniz. Aber er erwähnt nicht einmal dessen ausgedehnte Bemühungen um ein Zahlensystem, das einen so wichtigen Beitrag zu dem hohen Wirkungsgrad kybernetischer Maschinen leistet.

Welche Bedeutung hat Leibniz selbst seiner »binaria arithmetica« zugemessen? Diese Frage ist nicht leicht zu beantworten. Das Studium der Leibnizischen Manuskripte über das binäre Zahlensystem führt am Ende zu der Annahme, daß seine beschränkten praktischen Verwendungsmöglichkeiten jener Zeit auch für seinen Entdecker höchst unbefriedigend gewesen sind. Die Hinweise auf die Nützlichkeit des Systems für die Probierer »beim Wiegen aller Arten geringgewichtiger Massen« oder für die Münzen, »um verschiedenste Beträge mit wenig Stücken darzustellen«, rechtfertigen nicht den Aufwand an Geist, den Leibniz auf seine neue Arithmetik verwandte. Von einem inneren Drang getrieben, suchte er ständig nach höheren Zweck-

ken. Er konnte sich nicht vorstellen, daß ein Zahlensystem, dessen Ordnung und Harmonie von keinem anderen übertroffen wurde, nicht auch seine besondere Bestimmung habe. Seine Suche nach ihr mußte vergeblich bleiben, die Zeit dafür war noch nicht gekommen. Die unumstößliche Gewißheit von der Wichtigkeit seiner Entdeckung beruhte auf der Intuition des genialen Denkers, auf seinem Glauben an die Wirksamkeit neuer, rationaler Forschungsmethoden für den wissenschaftlichen Fortschritt.

Es finden sich viele Hinweise auf seine Überzeugung, so schwierig sie auch begründet werden konnte. Um so beglückter ist er, wenn er, wie bei Johann Christian Schulenburg, auf Verständnis für sein von Geheimnissen umgebenes Zahlensystem stößt. Ihm schreibt er am 17. Mai 1698: »Meine Vorstellungen bezüglich der dyadischen Progression haben Sie sehr gut erfaßt und klar gesehen, in welcher schöner Ordnung dabei alles vor sich geht. Ich denke aber, daß sie auch für die Förderung der Wissenschaft von Bedeutung sein wird, mag sie auch sonst auf das gewöhnliche Rechnen nicht anwendbar sein.« Nach anschließenden zahlentheoretischen Untersuchungen über die der Ziffernfolge im Binärsystem innewohnende Periodizität heißt es dann: »Wenn man solchen und ähnlichen Beobachtungen nachgeht, stößt man auf ganz neue, erstaunliche, auch praktisch bedeutsame Eigenschaften der Zahlen. Um es kurz zu sagen: hierin liegt eine theoretische Arithmetik neuer Art beschlossen, die wir mit Ihnen als göttlich bezeichnen können, die aber vorerst nur in ihren Ansätzen sichtbar ist.« Sind es nicht prophetische Worte, die weit in die noch dunkel verhangene Zukunft vorstoßen? Heute, im hellen Licht einer grandiosen technischen Entwicklung, liegen sie sicher deutbar und vielfach bestätigt vor uns.

Die Vorstellung, daß in der binären Arithmetik etwas enthalten ist, was noch nicht sichtbar, noch nicht definierbar, aber von großer Zukunftsbedeutung sei, hat Leibniz nicht mehr losgelassen. Vor allem um die Jahrhundertwende, in den Jahren von 1698 bis Ende des Jahres 1705, finden sich in dem umfangreichen Briefwechsel mit den bedeutendsten Gelehrten seiner Zeit immer neue, durch scharfsinnige Überlegungen gewonnene fortge-

schrittene Erkenntnisse über die dyadische Progression. Die Sorge, ein spürbarer Nachlaß seiner Spannkraft könne ihn hindern, »seine Gedanken zu retten«, spornt ihn zusätzlich an, sein Thema in zahlreichen Briefen, vor allem an seine französischen Kollegen, zu erörtern.

»Ich glaube zu sehen«, schreibt er am 4. April 1701 an den Marquis de l'Hôpital, einen französischen Mathematiker, »daß durch dieses Mittel und durch die unendlichen Reihen, dargestellt in dieser Form, etwas zu erreichen ist, was auf andere Weise nicht leicht gewonnen werden kann. Dies wird«, hier bedient sich Leibniz in dem französischen Text seines Briefes der italienischen Worte »anchora sacra«, »wie ein »heiliges Noch« sein.« Dieses nicht greifbare »Noch« hat ihn immer wieder gereizt, sich mit dem Binärsystem auseinanderzusetzen. »Es gibt klare Regeln für die Reihenperiodizität der natürlichen Zahlen und ihrer Vielfachen. Es überrascht und führt zu weitgehenden Konsequenzen, wie die Zweier-, Dreier- und sonstigen Potenzen und ihre Summen in den gleichen Perioden auftreten und diese nicht länger sind als die einfachsten Progressionen. Es ist wichtig, ihre Gesetze zu entdecken.«

Wir wollen uns klarmachen, was Leibniz darunter versteht. Es betrifft bestimmte Gesetzmäßigkeiten der in natürlicher Reihenfolge aufgestellten Zahlen des Binärsystems. Es ist aus folgender Tabelle zu erkennen, in der links die Binärzahlen, rechts die analogen Dezimalzahlen stehen.

<i>Binär</i>	<i>Dezimal</i>	<i>Binär</i>	<i>Dezimal</i>
0   0   0   0	0	1   0   0   0	8
0   0   0   1	1	1   0   0   1	9
0   0   1   0	2	1   0   1   0	10
0   0   1   1	3	1   0   1   1	11
0   1   0   0	4	1   1   0   0	12
0   1   0   1	5	1   1   0   1	13
0   1   1   0	6	1   1   1   0	14
0   1   1   1	7	1   1   1   1	15

Die erste (niedrigstwertige), immer von rechts gelesene Ziffer der Binärzahlen ist jeweils 0 oder 1, die zweite zweimal 0 oder zweimal 1, die dritte viermal 0 oder 1, die vierte achtmal 0 oder 1 usw. An erster Stelle kehrt also immer eine zweistellige Periode, nämlich 01, wieder, an zweiter Stelle eine vierstellige Periode, nämlich 0011, an dritter Stelle eine achtstellige usw.

Entsprechende Gesetzmäßigkeiten kann man aber auch feststellen, wenn man nicht alle Zahlen der Reihe nach, sondern nur jede zweite nimmt und jeweils eine ausläßt, also zum Beispiel:

<i>Binär</i>	<i>Dezimal</i>	<i>Binär</i>	<i>Dezimal</i>
00000	0	01000	8
00010	2	01010	10
00100	4	01100	12
00110	6	01110	14

So ergeben sich nämlich lauter gerade oder lauter ungerade Zahlen, je nachdem, ob man mit 0 oder 1 beginnt. Im Beispiel erhält man an der ersten Stelle die Periode 0, an der zweiten Stelle die Periode 01, an der dritten Stelle die Periode 0011 usw.

Die zahlentheoretischen Studien am Zweiersystem führten zu Ergebnissen, die von unmittelbarem Nutzen für die Anwendung dieses Systems im Aufbau elektronischer Ziffernrechner und für binär verschlüsselte Dezimalsysteme sind. Das wußten natürlich weder Leibniz noch seine Zeitgenossen, noch irgendeiner aus der großen Zahl von Mathematikern der anschließenden beiden Jahrhunderte und darüber hinaus. Erst die Konstrukteure elektronischer Rechenmaschinen unserer Zeit und die Theoretiker der Kybernetik haben die Überlegenheit der binären Arithmetik über die der Zahlensysteme mit jeder anderen Basis wieder erkannt und daraus ihre wissenschaftlichen und praktischen Folgerungen gezogen. Ihr geistiger Vater aber ist Leibniz. Die Verwandtschaft ist über die beiden Jahrhunderte hinweg erhalten geblieben. Das »anchora sacra«, das von dem Genie

Leibniz mit untrüglicher Gewißheit erspürte, aber in seiner konkreten Gestalt nicht zu definierende »heilige Noch«, ist der unübertrefflich strenge logische Aufbau des binären Zahlensystems als grundsätzliche Voraussetzung für elektronische Rechenmaschinen. Denn diese sind nicht nur arithmetische, sondern mit mindestens gleichem Anspruch logische Maschinen.

Leibniz hat über einen Zeitraum, der die schöpferisch fruchtbarsten Jahre seines Lebens umfaßt, immer wieder zu Überlegungen über das binäre Zahlensystem hingefunden. »Darüber habe ich mir schon lange Gedanken gemacht« und »obgleich ich dies schon seit zwanzig und mehr Jahren mit mir herumtrage«, schreibt er 1698. Das bedeutet, daß in die Zeit seines Pariser Aufenthalts von 1672 bis 1676 die ersten Gedanken zu seiner Dyadik gekeimt haben.

In diese Zeit fallen auch seine Bemühungen um die Konstruktion einer Rechenmaschine, deren Plan er mit nach Paris brachte. Ihre technisch befriedigende Verwirklichung stieß auf so große Hindernisse, daß sie ihm erst nach Jahrzehnten in Hannover gelang. In Paris hat Leibniz auch einen logischen Kalkül skizziert. Binärsystem, Rechenmaschine und logischer Kalkül sind aber die tragenden Elemente einer elektronischen Rechenmaschine.

Schon ein Blick auf diese Zusammenhänge erweckt ehrfürchtiges Staunen vor der prophetischen Sicht des großen Mannes. Es verdichtet sich fast zur Gewißheit über die ihm innewohnende Ahnung, wo des Rätsels Lösung, das »heilige Noch«, zu suchen war, beim Lesen einer bisher unveröffentlichten lateinischen Handschrift aus der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. Sie umfaßt zwei Blätter. Das erste trägt das Datum »15. März 1679«. Auf Blatt 2 fügt Leibniz seiner Erläuterung über die Multiplikation mit binären Zahlen folgende Bemerkung an:

»Diese Art Kalkül könnte auch mit einer Maschine ausgeführt werden. Auf folgende Weise sicherlich sehr leicht und ohne Aufwand: Eine Büchse soll so mit Löchern versehen sein, daß diese geöffnet und geschlossen wer-

den können. Sie sei offen an den Stellen, die jeweils 1 entsprechen, und bleibe geschlossen an denen, die 0 entsprechen. Durch die offenen Stellen lasse sie kleine Würfel oder Kugeln in Rinnen fallen, durch die anderen nichts. Sie werde so bewegt und von Spalte zu Spalte verschoben, wie die Multiplikation es erfordert. Die Rinnen sollen die Spalten darstellen, und kein Kügelchen soll aus einer Rinne in eine andere gelangen können, es sei denn, nachdem die Maschine in Bewegung gesetzt ist. Dann fließen alle Kügelchen in die nächste Rinne, wobei immer eines weggenommen wird, welches in ein leeres Loch fällt. Denn die Sache kann so eingerichtet werden, daß notwendig immer zwei zusammen herauskommen, sonst sollen sie nicht herauskommen.«\*

Die erste, nach dem binären Prinzip arbeitende Rechenmaschine wurde also bereits von Leibniz im Jahre 1679 skizziert. Leider hat er seine Idee, die – soweit bis heute festgestellt – nur in der zitierten Handschrift ihren Ausdruck gefunden hat, nicht in die Tat umgesetzt. Die sehr großen Schwierigkeiten, die ihm selbst in Paris, wo die besten Mechaniker der damaligen Zeit zur Verfügung standen, bei der Konstruktion seiner Dezimalrechenmaschine begegneten, mögen ihn davon abgehalten haben. Wie sollte es auch möglich gewesen sein, jemanden für die Herstellung und den Gebrauch einer Maschine zu gewinnen, die in einem der Mitwelt völlig unbekannt und unbegreiflichen Zahlensystem ihre Rechenschritte vollführte?

Ist es Zufall, daß Leibniz seiner »binaria arithmetica« so starke geistige und materielle Kräfte widmete? Wurzeln sie nicht vielmehr in der schöpferischen Kraft des Genies, visionär wahrzunehmen, was noch nicht in realen Bereichen sichtbar war?

Die »Histoire de l'Académie Royale des Sciences« in Paris war eine der angesehensten wissenschaftlichen Zeitschriften des 17. und 18. Jahrhunderts. Im Jahrgang 1703 erschien ein Aufsatz von Leibniz unter dem Titel »Explication de l'Arithmétique Binaire«. Es ist eine der wenigen Ver-

\* Auf den Inhalt dieses Blattes machte mich Herr Professor Dr. Erich Hochstetter aufmerksam.



öffentlichungen, die Leibniz zu seinen Lebzeiten veranlaßt hat. Um den druckreifen Text hat er Jahre gerungen. Das barocke Beiwerk früherer Ausführungen über die Dyadik, wie es z. B. noch in dem vom 2. Januar 1698 datierten Brief an Herzog Rudolf von Braunschweig zum Ausdruck kommt, ist verschwunden. In der klaren, knappen Sprache des seiner Sache sicheren Wissenschaftlers stellt er der geistig interessierten Welt das binäre Zahlensystem vor. Die Königliche Akademie der Wissenschaften ehrte den Verfasser durch einen einführenden Kommentar. Die Entdeckung der binären Welt mußte zur Kenntnis genommen werden, aber noch vermochte niemand ihre Bedeutung für die Zukunft zu ermessen. Sie blieb hinter fernen Horizonten bis in unsere Gegenwart verborgen, beheimatet in den geistigen Weiten eines der größten Denker der Menschheit.

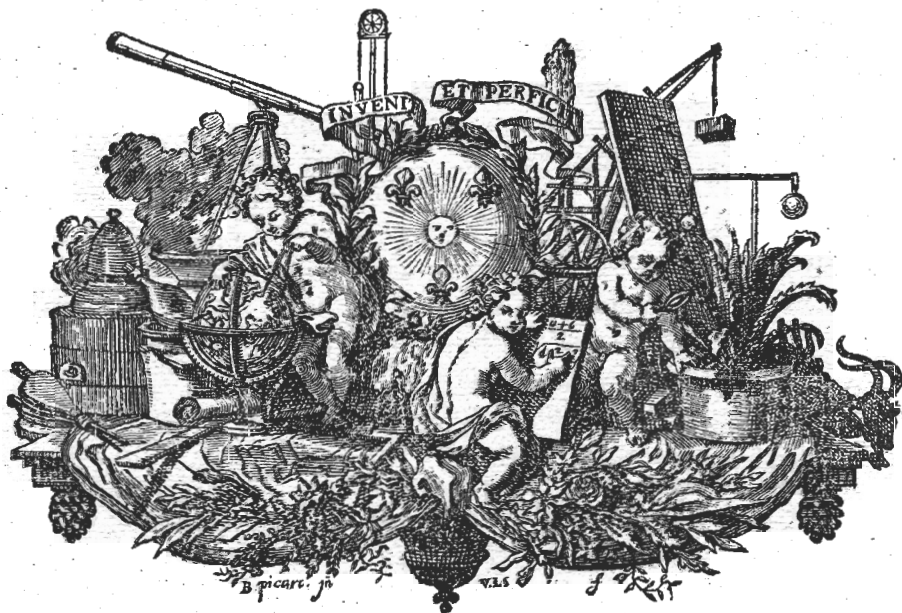


HISTOIRE  
DE  
L'ACADEMIE  
ROYALE  
DES SCIENCES.

Année MDCCIII.

Avec les Memoires de Mathematique & de Physique,  
pour la même Année.

*Tirés des Registres de cette Academie.*



A PARIS,  
Chez JEAN BOUDOT, Imprimeur Ordinaire du Roy, & de  
l'Academie Royale des Sciences, rue S. Jacques au Soleil d'or,  
proche la Fontaine S. Severin.

M. DCCV.  
AVEC PRIVILEGE DU ROY.



E X P L I C A T I O N  
D E L' A R I T M È T I Q U E  
B I N A I R E,

*Qui se sert des seuls caractères 0 & 1; avec des Remarques sur son utilité, & sur ce qu'elle donne le sens des anciennes figures Chinoises de Fohy.*

P A R M. L E I B N I T Z.

**L**E calcul ordinaire d'Arithmétique se fait suivant la progression de dix en dix. On se sert de dix caractères, qui sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui signifient zero, un, & les nombres suivans jusqu'à neuf inclusivement. Et puis allant à dix, on recommence, & on écrit dix par 10; & dix fois dix, ou cent, par 100; & dix fois cent, ou mille, par 1000, & dix fois mille, par 10000. Et ainsi de suite.

1703.  
5. May.

Mais au lieu de la progression de dix en dix, j'ay employé depuis plusieurs années la progression la plus simple de toutes, qui va de deux en deux; ayant trouvé qu'elle sert à la perfection de la science des Nombres. Ainsi je n'y employe point d'autres caractères que 0 & 1; & puis allant à deux, je recommence. C'est-pourquoy deux s'écrit icy par 10, & deux fois deux ou quatre par 100; & deux fois quatre ou huit par 1000, & deux fois huit ou seize par 10000, & ainsi de suite. Voicy la Table des Nombres de cette façon qu'on peut continuer tant que l'on voudra.

On voit icy d'un coup d'œil la raison d'une propriété célèbre de la progression Géométrique double en Nombres entiers, qui porte que si on n'a qu'un de ces nombres de chaque degré, on en peut composer tous les autres nom-

TABLE 86 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

DES  
NOMBRES.

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100
21	10101
22	10110
23	10111
24	11000
25	11001
26	11010
27	11011
28	11100
29	11101
30	11110
31	11111
32	100000
&c.	&c.

bres entiers au-dessous du double du plus haut degré. Car icy, c'est comme si on disoit, par exemple, que III ou 7 est la somme de quatre, de deux & d'un. Et que 1101 ou 13 est la somme de huit, quatre & un. Cette propriété sert aux Essayeurs pour peser toutes sortes de masses avec peu de poids, & pourroit servir dans les monnoyes pour donner plusieurs valeurs avec peu de pieces.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	
1	1
10101	13

Cette expression des Nombres étant établie, sert à faire tres-facilement toutes sortes d'operations.

Pour l'Addition  
par exemple. ☉

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la Sou-  
straction.

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la Mul-  
tiplication.

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
1001	9	101		1010	
		1111	15	11001	25

Pour la Division.

15	11111	101	5
3	11111		
	11		

Et toutes ces operations sont si aisées, qu'on n'a jamais besoin de rien essayer ni deviner, comme il faut faire dans la division ordinaire. On n'a point besoin non-plus de rien apprendre par cœur icy, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut sçavoir, par exemple, que 6 & 7 pris ensemble font 13; & que 5 multiplié par 3 donne 15, suivant la Table d'une fois un est un, qu'on appelle Pythagorique. Mais icy tout cela se trouve & se prouve de source, comme l'on voit dans les exemples précédens sous les signes ☉ & ☉.

Cependant je ne recommande point cette maniere de compter, pour la faire introduire à la place de la pratique ordinaire par dix. Car outre qu'on est accoutumé à celle-cy, on n'y a point besoin de chercher ce qu'on a déjà appris par cœur : ainsi la pratique par dix est plus abrégée, & les nombres y sont moins longs. Et si on étoit accoutumé à aller par douze ou par seize, il y auroit encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'est à dire par 0 & par 1, en récompense de sa longueur, est le plus fondamental pour la science, & donne des nouvelles découvertes, qui se trouvent utiles ensuite, même pour la pratique des nombres, & sur tout pour la Geometrie ; dont la raison est, que les nombres étant réduits aux plus simples principes, comme 0 & 1, il paroît par tout un ordre merveilleux. Par exemple, dans *la Table même des Nombres*, on voit en chaque colonne regner des periodes qui recommencent toujours. Dans la premiere colonne c'est 01, dans la seconde 0011, dans la troisième 00001111, dans la quatrième 0000000011111111, & ainsi de suite. Et on a mis des petits zeros dans la Table pour remplir le vuide au commencement de la colonne, & pour mieux marquer ces periodes. On a mené aussi des lignes dans la Table, qui marquent que ce que ces lignes renferment revient toujours sous elles. Et il se trouve encore que les Nombres Quarrez, Cubiques, & d'autres puissances ; item les Nombres Triangulaires, Pyramidaux & autres nombres figurez, ont aussi des semblables periodes : de sorte qu'on en peut écrire les Tables tout de suite, sans calculer. Et une prolixité dans le commencement, qui donne ensuite le moyen d'épargner le calcul, & d'aller à l'infini par regle, est infiniment avantageuse.

Ce qu'il y a de surprenant dans ce calcul, c'est que cette Arithmetique par 0 & 1 se trouve contenir le mystere des lignes d'un ancien Roy & Philosophe nommé *Fohy* qu'on croit avoir vécu il y a plus de quatre mille ans, & que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire & de leurs sciences. Il y a plusieurs Figu-

res Lineaires qu'on lui attribüë. Elles reviennent toutes à cette Arithmetique ; mais il suffit de mettre icy *la Figure de huit Cova* comme on l'appelle, qui passe pour fondamentale, & d'y joindre l'explication qui est manifeste, pourvû qu'on remarque premierement qu'une ligne entiere ——— signifie l'unité ou 1, & secondement qu'une ligne brisée — — — signifie le zero ou 0.

≡≡≡	≡≡≡	≡≡≡	≡≡≡	≡≡≡	≡≡≡	≡≡≡	≡≡≡
00	01	010	011	100	101	110	111
0	1	10	11	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

Les Chinois ont perdu la signification des *Cova* ou Lineations de Fohy, peut-être depuis plus d'un millenaire d'année ; & ils ont fait des Commentaires là-dessus, où ils ont cherché je ne sçay quels sens éloignés. De sorte qu'il a fallu que la vraie explication leur vînt maintenant des Européens : Voicy comment. Il n'y a gueres plus de deux ans que j'envoyay au R. P. Bouvet Jésuite François celebre, qui demeure à Pekin, ma maniere de compter par 0 & 1, & il n'en fallut pas davantage pour le faire reconnoître que c'est la clef des Figures de Fohy. Ainsi m'écrivant le 14 Novembre 1701, il m'a envoyé la grande Figure de ce Prince Philosophe qui va à 64, & ne laisse plus lieu de douter de la vérité de nôtre interpretation ; de sorte qu'on peut dire que ce Pere a déchiffré l'Enigme de Fohy à l'aide de ce que je lui avois communiqué. Et comme ces Figures sont peut-être le plus ancien monument de science qui soit au monde, cette restitution de leur sens, après un si grand intervalle de tems, paroîtra d'autant plus curieuse.

Le consentement des Figures de Fohy & de ma Table des Nombres, se fait mieux voir lorsque dans la Table on supplée les zeros initiaux, qui paroissent superflus, mais qui servent à mieux marquer la periode de la colonne,

ne,

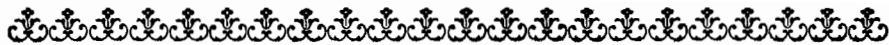


ne, comme je les y ay suppléés en effet avec des petits ronds pour les distinguer des zeros nécessaires, & cet accord me donne une grande opinion de la profondeur des méditations de Fohy. Car ce qui nous paroît aisé maintenant ne l'étoit pas tant dans ces tems éloignés. L'Arithmétique Binaire ou Dyadique est en effet fort aisée aujourd'hui pour peu qu'on y pense, parceque nôtre maniere de compter y aide beaucoup, dont il semble qu'on retranche seulement le trop. Mais cette Arithmétique ordinaire par dix ne paroît pas fort ancienne, au moins les Grecs & les Romains l'ont ignorée, & ont été privés de ses avantages. Il semble que l'Europe en doit l'introduction à Gerbert, depuis Pape sous le nom de Sylvestre II, qui l'a eue des Maures d'Espagne.

Or comme l'on croit à la Chine que Fohy est encore Auteur des Caracteres Chinois ordinaires, quoique fort altérés par la suite des tems: son Essay d'Arithmétique fait juger qu'il pourroit bien s'y trouver encore quelque chose de considerable par rapport aux nombres & aux idées, si l'on pouvoit déterrer le fondement de l'écriture Chinoise, d'autant plus qu'on croit à la Chine, qu'il a eu égard aux nombres en l'établissant. Le R. P. Bouvet est fort porté à pousser cette pointe, & tres-capable d'y réussir en bien des manieres. Cependant je ne sçay s'il y a jamais eu dans l'écriture Chinoise un avantage approchant de celui qui doit être nécessairement dans une Caractéristique que je projette. C'est que tout raisonnement qu'on peut tirer des notions, pourroit être tiré de leurs Caracteres par une maniere de calcul, qui seroit un des plus importans moyens d'aider l'esprit humain.







# Die mathematischen Grundlagen der Dualzahlen und ihre Bedeutung für die Technik der Datenverarbeitung

*Heinz Gumin*

Wir haben uns so sehr an die Dezimaldarstellung der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... gewöhnt, daß uns beim Aufsteigen in der Reihe der natürlichen Zahlen die Darstellung der Zahl *Zehn* in der Form 10 durch zwei bereits verwendete Ziffern als Selbstverständlichkeit erscheint. Ebenso selbstverständlich erscheint es uns, daß man zur Darstellung von Zahlen die zehn Ziffern 0, 1, ..., 9 zur Verfügung hat. Mit genau zehn Ziffern ergibt sich dann zwangsläufig der systematische Aufbau der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen, etwa der Übergang von 19 zu 20 oder von 99 zu 100. Die Selbstverständlichkeit ist wohl damit zu begründen, daß unsere Sprache zur Bezeichnung natürlicher Zahlen von der Dezimaldarstellung ausgeht. Die Zahl 145 z. B. wird sprachlich (einhundertfünfundvierzig) mit Hilfe der Bezeichnungen der Ziffern 0, ..., 9 mit Zusätzen zur Angabe des Stellenwerts einer Ziffer ausgedrückt. Daß wir im Deutschen sprachlich die Reihenfolge der Ziffern in der Dezimaldarstellung verändern, ist zugegebenermaßen störend und fehlererzeugend, ändert jedoch nichts am Prinzip.

Manche Ausnahmen, wie *quatre-vingt* (franz.) für achtzig, deuten darauf hin, daß zu gewissen Zeiten auch Zahlen wie 20 anstelle von 10 als Basis des Darstellungssystems verwendet wurden. Der Zahl 20 als Basis begegnet man z. B. auch im britischen Münzsystem, ebenso wie der Zahl 12. Zeit und Winkel messen wir mit einem System, das auf der Basis 60 beruht. Tatsächlich ist das 60er-System bedeutend älter als das Dezimalsystem. Schon die Babylonier haben mit der Basis 60 gerechnet. Die noch heute übliche Aufteilung einer Stunde in 60 Minuten und einer Minute in 60 Sekunden verdanken wir der bedeutenden babylonischen Astronomie. Erst um 400 n. Chr. haben Hindu-Astronomen die Basis 10 zur Darstellung von Zahlen eingeführt, die dann über die Araber an uns überliefert wurde.

Begründungen für die Verwendungen der Basen 10, 12, 20 oder 60 kann man geben. So zeichnen sich 12 und 60 als Basis dadurch aus, daß 12 und 60 besonders viele Teiler haben. Teiler von 12 sind 2, 3, 4 und 6; 60 hat die Teiler 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 und 30. Aus diesem Grunde ist es möglich, eine Reihe von Bruchteilen von Minuten durch eine ganze Zahl von Sekunden darzustellen:  $\frac{1}{2}$  Minute = 30 Sekunden,  $\frac{1}{3}$  Minute = 20 Sekunden,  $\frac{1}{4}$  Minute = 15 Sekunden,  $\frac{1}{5}$  Minute = 12 Sekunden,  $\frac{1}{6}$  Minute = 10 Sekunden. Im Dezimalsystem ist man schon beim Nenner 3 auf einen unendlichen Dezimalbruch angewiesen. Die Zahl 20 als Basis wird von der Zahl unserer Finger und Zehen hergeleitet, bei der Zahl 10 als Basis sprechen alle Indizien dafür, daß die Zahl unserer Finger als Maßeinheit diene. Die römische Ziffer V soll eine Hand, die Ziffer X zwei Hände darstellen. Wenn, wie behauptet wird, die Basis 10 unseres Darstellungssystems auf die Zahl unserer Finger zurückzuführen ist, so wird mancher Entwickler von Datenverarbeitungsanlagen bedauern, daß niemand auf die Idee kam, die Zahl unserer Hände als Basis eines Darstellungssystems zu verwenden.

Mathematisch gesehen ist das Dezimalsystem ein Darstellungssystem, in dem eine Zahl als Summe von geeigneten Vielfachen von Zehnerpotenzen dargestellt wird. 145 ist als Abkürzung für

$$1 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1, \quad \text{d. h. für} \quad 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

zu verstehen. Führende Nullen (etwa 0145 für 145) werden fast immer aus Bequemlichkeitsgründen fortgelassen.

Jede Zahl läßt sich als Summe von Vielfachen von Zehnerpotenzen darstellen. Als Faktoren der Zehnerpotenzen treten die zehn Ziffern 0 bis 9 auf. Zahlen in Dezimaldarstellung, kurz *Dezimalzahlen*, kann man addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Die uns in der Schule gelehrteten Verfahren setzen für die Ausführung der vier Grundrechnungsarten die Kenntnis des kleinen Einsundeins und des kleinen Einmaleins voraus. Einschließlich der trivialen Fälle, wie  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $\dots$  und  $0 \cdot 0 = 0$ ,  $0 \cdot 1 = 0$ ,  $\dots$  sind 100 Elementaradditionen und 100 Elementarmultiplikationen auswendig zu lernen.

Allgemein läßt sich zeigen, daß jede natürliche Zahl  $a$  als Summe geeigneter Vielfacher von Potenzen einer natürlichen Zahl  $b$  in der Form

$$a = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

darstellbar ist. Setzt man von der Basis  $b$  zweckmäßigerweise voraus, daß  $b$  größer ist als 1, so ist offensichtlich, daß dann die Faktoren der Potenzen von  $b$  nur die Werte  $0, 1, \dots, b - 1$  annehmen. Unter dieser Nebenbedingung wird die Darstellung von  $a$  als Summe von Vielfachen von Potenzen von  $b$  sogar eindeutig. Es ist also kein Zufall, wenn als Faktoren der Potenzen von 10 bei der Dezimaldarstellung genau die Ziffern 0 bis 9 auftreten.

Einige Beispiele mögen dies erläutern. Die Zahl 145 läßt sich z. B. als Summe von Vielfachen von Potenzen von 8 in der Form

$$\begin{aligned} 145 &= 2 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 \end{aligned}$$

beschreiben, wobei die Faktoren der Potenzen von 8 auf die acht Werte  $0, 1, 2, \dots, 7$  beschränkt sind. Mit 7 als Basis ergibt sich die Summe

$$\begin{aligned} 145 &= 2 \cdot 49 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 \end{aligned}$$

Die Faktoren der Potenzen von 7 nehmen in dieser Darstellung nur die Werte  $0, 1, 2, \dots, 6$  an.

Interessant ist nun die Darstellung mit der kleinsten Basis  $b = 2$ . Als Faktoren der Potenzen von 2 treten nach dem Vorangehenden dann nur die Ziffern 0 oder 1 auf. Für 145 etwa findet man leicht als Summe

$$\begin{aligned} 145 &= 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \end{aligned}$$

Trifft man nun bei der Darstellung der Zahl  $a$  durch eine Summe von Vielfachen von Potenzen von  $b$  analog zur Dezimaldarstellung die Verabredung, die Potenzen von  $b$  abkürzend *nicht* zu notieren, sondern nur die Faktoren der Potenzen von  $b$  aufzuschreiben, so ergibt sich für  $a$  anstelle von

$$a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$$

die abgekürzte Darstellung  $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

Die Dezimalzahl 145 nimmt in abgekürzter Darstellung bei Verwendung der Basis 8 die Form

$$221,$$

bei Verwendung der Basis 7 die Form

$$265$$

und bei Verwendung der Basis 2 die Form

$$10010001 \text{ an.}$$

Da man der abgekürzten Darstellung nicht ansieht, zu welcher Basis sie gehört, hat man verabredet, die zugehörige Basis am Ende der Darstellung als kleine Indexziffer anzugeben, falls Mißverständnisse zu befürchten sind. Dies soll im folgenden auch für Dezimalzahlen geschehen. Nach dieser Verabredung kann man schreiben:  $145_{10} = 221_8$

$$= 265_7$$

$$= 10010001_2$$

Wie der Leser leicht verifiziert, führt die Verwendung der Basen 9, 6, 5, 4 und 3 zu den Darstellungen:  $145_{10} = 171_9$

$$= 401_6$$

$$= 1040_5$$

$$= 2101_4$$

$$= 12101_3$$

In Analogie zur Bezeichnung Dezimalzahl nennt man Zahlen in einer Darstellung mit der Basis 8 *Oktalzahlen*, in einer Darstellung mit der Basis 2 *Dualzahlen*. Entsprechend heißt das Darstellungssystem Oktalsystem bzw. Dualsystem.

Hat man sich in dieser Weise so weit vom Dezimalsystem gelöst, daß es nur als Spezialfall vieler möglicher Darstellungssysteme erscheint, so kann man die Frage stellen, welche Basis, unabhängig von jeder Überlieferung, die zweckmäßigste ist. Die Frage läßt sich von verschiedenen Standpunkten aus beantworten.

Erinnert man sich daran, daß zur Ausführung der vier Grundrechnungsarten zu jedem Darstellungssystem das kleine Einsundeins und das kleine Einmaleins beherrscht werden müssen, so sind zur Basis  $b$  mit den möglichen Faktoren der Potenzen von  $b$ , die die Werte  $0, 1, \dots, b - 1$  annehmen können,  $b^2$  Additionen und  $b^2$  Multiplikationen zu erlernen. Das Dualsystem mit der kleinsten möglichen Basis 2 zeichnet sich dann dadurch aus, daß insgesamt 4 Additionen und 4 Multiplikationen als Elementaroperationen erlernt werden müssen. Man vergleiche dies mit den 100 Elementaradditionen und 100 Elementarmultiplikationen im Dezimalsystem. Außerdem überraschen im Darstellungssystem mit der Basis 2 das kleine Einsundeins und Einmaleins durch ihre Einfachheit. Da als Faktoren nur die Ziffern 0 und 1 notwendig sind, enthält

das kleine Einsundeins  
die vier Additionen\*

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 10 \end{aligned}$$

und das kleine Einmaleins  
die vier Multiplikationen

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

---

\* Der Einfachheit halber wird hier und im folgenden die die Basis kennzeichnende Indexziffer 2 weggelassen.

Von den Elementaradditionen und Elementarmultiplikationen des Dualsystems ist nur eine zu erläutern, nämlich die Addition  $1 + 1 = 10$ .

Die Summe von 1 und 1 ergibt im Dezimalsystem 2. Die Zahl 2 hat aber im Darstellungssystem mit der Basis 2 die abgekürzte Darstellung 10 für  $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ .

Für den Entwickler von Datenverarbeitungsanlagen gibt es andere Gesichtspunkte, die für die Verwendung der Basis 2 sprechen. In einer Datenverarbeitungsanlage sind Zahlen durch elektrische Größen darzustellen, etwa im Fall von Dezimalzahlen so, daß die  $n$  Ziffern einer  $n$ -stelligen Dezimalzahl auf  $n$  Leitungen durch verschiedene Spannungen auf den Leitungen, gemessen gegen ein Bezugspotential, dargestellt werden. Der Ziffer 0 entspricht z. B. die Spannung 0 V, der Ziffer 1 die Spannung 1 V, der Ziffer 2 die Spannung 2 V usw. Man hätte dann auf einer Leitung zwischen 10 verschiedenen Spannungen zu unterscheiden. Technisch einfacher und zuverlässiger ist selbstverständlich eine Darstellung, bei der man je Leitung nur 2 verschiedene Zustände zu unterscheiden hätte, etwa 0 V für die Ziffer 0, 1 V für die Ziffer 1.

Durch einen Kunstgriff kann man auch Dezimalzahlen in Datenverarbeitungsanlagen durch 0 und 1 darstellen. In der Technik von Datenverarbeitungsanlagen, die dezimal arbeiten, geht man in der Tat so vor. Eine Möglichkeit besteht darin, jede Dezimalziffer 0 bis 9 durch die ihr entsprechende, maximal vierstellige Dualzahl zu ersetzen:

0	0	5	101
1	1	6	110
2	10	7	111
3	11	8	1000
4	100	9	1001

Da jede beliebige Dezimalziffer übertragbar und verarbeitbar sein muß, sind zur parallelen Übertragung einer  $n$ -stelligen Dezimalzahl  $4n$  Leitungen erforderlich, wobei nun auf jeder Leitung nur zwischen 2 Zuständen, 0 und 1, zu unterscheiden ist. Natürlicher wäre es jedenfalls, gleich von einer



Zahlendarstellung auszugehen, bei der als Faktoren der Potenzen nur die Werte 0 und 1 vorkommen, also vom Dualsystem. Die Dualdarstellung bringt außerdem den wesentlichen Vorteil, daß zur parallelen Übertragung von  $n$ -stelligen Dezimalzahlen nicht  $4n$  Leitungen, sondern im Durchschnitt nur  $3,32n$  Leitungen notwendig sind. Ein Beispiel soll das erläutern: Zur parallelen Darstellung von 3stelligen Dezimalzahlen werden je Ziffer 4, also insgesamt 12 Leitungen benötigt. Geht man zum Dualsystem über, so reichen 10 Leitungen zur parallelen Übertragung aus, da die maximal zu übertragende Dezimalzahl 999 dual durch 1111100111 dargestellt wird und nur 10 Stellen hat.

Überlegungen ähnlicher Art kann man über das Speichern von Zahlen anstellen. Die meisten Bauteile, die sich zur Speicherung von Zahlen eignen, haben nur zwei stabile Zustände. Zum Beispiel kann ein Relais abgefallen sein oder angezogen haben. Man hat also eine Darstellungsart zu suchen, in der Zahlen nur durch die Werte 0 oder 1 dargestellt werden. Die Verschlüsselung jeder Dezimalziffer einer Dezimalzahl hat gegenüber der direkten Dualverschlüsselung den Nachteil, daß zur Speicherung einer  $n$ -stelligen Dezimalzahl  $4n$  Bauteile gegenüber  $3,32n$  bei Darstellung im Dualsystem angewendet werden müssen.

Schließlich müssen Zahlen in Datenverarbeitungsanlagen verarbeitet werden. Die Betrachtung über die Anzahl der Elementaradditionen und Elementarmultiplikationen bei Verwendung des Dualsystems zeigt deutlich, wie einfach Addier- und Multiplizierwerke einer Anlage mit Dualdarstellung im Vergleich zur Dezimaldarstellung sind.

Die Vorteile des Dualsystems für Datenverarbeitungsanlagen überwiegen derart, daß viele Datenverarbeitungsanlagen intern mit Zahlen im Dualsystem arbeiten, obwohl dann wegen des Verkehrs mit der Umwelt Umrechnungen vom Dezimalsystem ins Dualsystem notwendig werden. Diese Umrechnungen wären vermeidbar, wenn, wie gesagt, vor langer Zeit die Zahl unserer Hände anstelle der Zahl unserer Finger als Grundlage unseres Bezeichnungssystems für Zahlen gedient hätte.



GOTHOFREDI GUILLELMI  
LEIBNITII

*S. Cæsar. Majestatis Consiliarü, & S. Reg. Majest.  
Britanniarum a Consiliis Justitiæ intimis, nec non  
a scribendâ Historiâ,*

OPERA OMNIA,

Nunc primum collecta, in Classes distributa, præfatio-  
nibus & indicibus exornata, studio

LUDOVICI DUTENS.

TOMUS TERTIUS,

CONTINENS OPERA MATHEMATICA.



GENEVÆ,

Apud FRATRES DE TOURNES.

---

MDCCLXVIII.



m!

Seiner

Geheiligten Königl. Majestät

Des

Aller Durchläuchtigsten und Groß-  
Mächtigsten Fürsten und Herrn /

SSRNR

GEORGII

des Ersten /

Königs in Groß-Britannien,  
Francreich und Irreland, grossen Be-  
schützern des Glaubens / und Stifftern des  
Friedens / des H. Röm. Reichs Erz-Schatz-Meisters  
und Chur-Fürstens / Herzogs zu Braunschweig /  
und Lüneburg /  
& reliqua,

Unseres Allergnädigsten Königs /





## Zugabe

Zweyer / von dem seel. Herrn von Leibnitz / vor  
 Jahren / an den Autorem, damaligen Rectorem an  
 der Königlichen Dom-Schule, in Bremen, von  
 der Dyadischen Rechnungs-Art / geschriebenen  
 Briefe.

### I.

**E**T si Dominus Sanderus, \*) plus petierit meo nomine, quam ipse ego fuisset ausus, qui tempore tuo abuti nollem, plurimum tamen lucri inde ad me pervenit, literis à te acceptis humanissimis, & muneribus etiam, quibus plurimum sum delectatus, & gratias deo (singulares, \*\*) Utraque dissertatio, quam misisti, argumenti mihi pergrati est. Nam Urnæ repertæ (sub tumulis, de quibus *Blumiana Theses*, \*\*\*) Antiquitates harum regionum illustrant. Calculi vero Mathematici applicatio ad usum, ac præterea ratiocinia in Metaphysicis Semi-Mathematica, quæ utraque in *Knolleanis* reperi, plane sunt ad palatum meum. Velim delineatas haberi Urnas, cæteraque quæ præfatione memoras, & Dominum *Knolleum* pergere optem in his, quæ ornare cœpit, studiis illustrandis. Ejus meditatio Metaphysica habere mihi visa est aliquid

\*) Candidatus Juris Bremensis, jam diu pie defunctus.

\*\*\*) *Mathesis, ejusque Indoles, Theologia applicanda*, quam, sub Præsidio *Sturmiano*, Altdorfii, d. 9. Jun. 1694. primis tantum modo lineis, monstravi, casu, ILLUSTRATIO etiam oblata, anam dedit Commercii hujus Literarii.

\*\*\*\*) *Theses Blumiana* Tumulum, cum aliquot *Urnis*, in ducatu Bremensi inventis, me Præsidente, in Arhenzo Regio, d. 1. Mart. 1697. Bremæ, Eruditorum disquisitioni subiciebant.



aliquid pulcri, & profundi, & si hoc quoque addere licet, congrui ad sensus meo. \*\*\*\*)

Nimirum fines seu limites sunt de essentia creaturarum, limites autem sunt aliquid privativum, consistuntque in negatione progressus ulterioris. Interim fatendum est, creaturam, postquam jam valorem à Deo nacta est, qualisque in sensus incurrit, aliquid etiam positivum continere, seu aliquid habere ultra fines, neque adeo in meros limites, seu indivisibilia posse resolvi. Ac proinde etiam ex ipsiusmet thesauri auctoris (puro) sententia, *postulatum*, ex quo resolutionem in meros fines, seu mera indivisibilia, infert, ad creaturam cum valore sumptam applicari non posse. Atque hic valor, cum consistat in positivo, est quidam perfectionis creaturæ gradus, cui etiam agendi vis inest, quæ, ut ego arbitror, substantiæ naturam constituit. Adeo ut valor ille à Deo tributus, revera sit vigor, seu vis indita rebus, quam quidam frustra negant, non animadvertentes sese ita, præter opinionem, incidere in doctrinam *Spinosa*, qui DEum solum facit substantiam, cætera ejus modos.

Atque hæc est origo rerum ex DEO, & nihilo; positivo, & privativo; perfectione, & imperfectione; valore, & limitibus; activo & passivo; forma (i. e. entelechia, nisu, vigore) & materia, seu mole, per se torpente, nisi quod resistantiam habet. Illustravi ista non

o nihil origine numerorum ex 0 & 1 à me observata, quæ *pulcer-*  
 1 1 *rimum est Emblemata perpetua rerum creationis ex nihilo,*  
 10 2 *dependentia, qua à DEO.* Nam adhibita progressionem sim-  
 11 3 plicissima, nempe *dyadica*, loca decadicæ, vel quater-  
 100 4 nariæ, omnes numeri exprimi possunt per 0 & 1, ut in  
 101 5 Tab. adjecta patebit; in qua genesi numerorum, quæ maxi-  
 110 6 me naturæ convenit, multa latent mira ad meditationem,  
 111 7 imo & ad praxin, etsi non pro usû vulgari,  
 1000 8

Cæte-

\*\*\*\*) *Dr. Adamus Andreas Knolle*, Varileus, *viv. in dylis*, ex Academiis redux, sacrum, in *Territorio Noribergensi* suscepturus officium, abiturus, *Nomina Philomatha desideria, ex Principiis Algebra Analyticis, & Metaphysica Semi-Mathematica, Philosophia illa altiore*, A. 1697. mensi Jun. in laudato Lyceo, sub præsidio nostro, publicè exponebat ventilationi.



Cæterum rogo, ut *Dominum Knolleum*, data occasione, etiam meo ( si tanti videtur ) nomine horteris, uti in præclaris istis meditationibus pergat, qualium similes sæpe ab ipso videre velim, sive in Mathematicis, sive in Philosophia illa altiore. Excitandum etiam putem ad colendam illam sublimiorem Mathesin, quæ continet *Scientiam Infiniti*; cujus elementa quædam à me sunt prodita, novo calculi genere proposito, quem *Hugenius*, alique præstantes viri, non sine plausu, exceperunt, & quem nunc illustrarunt imprimis *Dominus Bernoullii* fratres, & peculiari etiam dissertatione *Dominus Marchio Hospitalius, Gallus*. Et compertum est, non alia melius ratione aperiri aditum à Geometria ad Naturam, quæ per infinitos gradus intermedios, in omni mutatione ( ut ego arbitror ) progrediens, characterem habet Autoris infiniti. Quæ olim mihi de nostro solis incolatu, ex præclari Astronomi, *Dominus Eimmarti*, placitis indicari curaveras, verissima arbitror, si intelligamus tellurem esse inter planetas, seu satellites solis. Sin altius aliquid subest, fatebor mentem Autoris mihi non esse perspectam. *Newtonus* Mathematicus excellens astrorum vortices tollendos putat; sed mihi, ut olim in Actis Lipsiensium prodidi, non tantum conservari posse sed etiam pulcherrime procedere videntur, circulatione harmonica, cujus admirandas deprehendi proprietates.

De observatis Eimmartianis vellem aliquando nosse distinctiora, ac tuis etiam doctissimis cogitationibus frui; sed agnosco occupationes tuas laboriosas, & valetudini etiam parum firmæ indoleo; meliora precatus, speransque, modo in tempore tibi prospicias; quod faciendum suadeo. Vale, dabam Hannoveræ, 29. Martii, 1698.

deditissimus

*Godofredus Guilielmus Leibnitius.*

## II.

**V**alde tibi obstrictus sum, non minus pro egregiis dissertationibus tuis, quam pro elegantibus delineationibus Urnarum, vellemque vicissim aliqua re demereri posse. Mentem meam circa progressionem dyadicam optime assecutus es, & præclare etiam observasti, quam pulchra illic omnia ratione procedant. Puto autem, & utilitatem habituram ad augendam scientiam, etsi alioqui non sit transferenda ad communem usum calculandi. Certa etiam lege procedere deprehendentur notæ, pro variis proprietatibus numerorum. Nam regula generalis est; *Ubiunque principia sunt ordinata, omnia etiam derivata ordinate progredi*, de quo jam hic meditari dudum cœpi. Et primum patet numeros naturali ordine dispositos ita procedere,

0000	0	ut nota prima dextra sit 0 vel 1. &c. secunda 0 vel 0;
0001	1	vel 1. vel. 1. &c. tertia 0 vel 0; vel 0, vel 0; vel 1,
0010	2	vel 1, vel 1, vel 1, &c. quarta 00000000 11111111 &c.
0011	3	quinta 0 (sedecies) 1 (sedecies) & ita rursus.

0100	4	Atque hoc modo apparet in prima sede periodum, semper redeuntem, esse binariam 01; in secunda esse quaternariam 0011; in tertia octonariam; in quarta sedenariam, & sic porro.
0101	5	
0110	6	
0111	7	
1000	8	
1001	9	
1010	10	

1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15 &c.

Verum

0000000	0	Verum quod notatu dignissimum est, eadem
0000011	3	lex ordinis observatur. si sumas non omnes ordine
0000110	6	numeros, sed uno omisso alterum quemque; nam
0001001	9	tunc proveniunt vel omnes pares, vel omnes im-
0001100	12	pares. Imo amplius, si sumas tertium quemque,
0001111	15	seu omnes ternarios, sive divisibiles per 3; itemque
0010010	18	in omnibus quaternariis, & quinariis, & ita porro;
0010101	21	ut periodi eadem sint, quæ naturalium. Ecce <i>Ternarios</i>
0011000	24	in Exemplum; ubi in sede dextra prima 01,
0011011	27	binaria periodus; Secunda 0110, quaternaria; ter-
0011110	30	tia 0010 1101, octonaria; quarta 00011100
0100001	33	11100011 sedenaria; quinta 00000111110000
0100100	36	111111000011111, & ita porro.
0100111	39	Est notandum, hic dimidiam cujusque periodi
0101010	42	semper habere notas oppositas notis respondentibus
0101101	45	alteri dimidiæ ejusdem periodi. v. g.
0110000	48	00011100 11100011
0110011	51	constat ex 00011100 } ubi permutatio inter 0 & 1.
0110110	54	& ex 11100011 }
0111001	57	
0111100	60	Has aliasque id genus observationes prosequen-
0111111	63	do, via aperletur ad novas & miras, atque etiam uti-
1000010	66	les, numerorum proprietates. Et, ut verbo dicam,
1000101	69	latet in his quadam novi generis Arithmetica theo-
1001000	72	retica, quam tecum possimus divinam dicere, cu-
1001011	75	jus tantum primos adhuc aditus videmus. Nec du-
1001110	78	bium est etiam quadratos, & cubos, & alios numeros
1010001	81	figuratos, certas quasdam suæ progressionis lege esse
1010100	84	habituos.
1010111	87	
1011010	90	
1011101	93	
1100000	96	
1100011	99 *	

A a 2

Simi-

\*) Si quis *Tabulam* nostram *Leibnitianam* nr. II. continuaverit; quod alibi a nobis, exercitii gratia, non sine voluptate, facili & ludibundo velut negotio, factum, usque ad numerum 256. vulgarem, quem *Leibnitii Dyadica*, per 100000000, exprimit: is Ternarios hos non tantum, sed & reliquos intercurrentes omnes, heic quidem non expressos, ipsoprehendet intuitu. Periodos vero ipsas; primam binariam, 01, 01, 01, &c. secundam quaternariam, 0110, 0110, &c. (h. l. in *Ternariis*); tertiam octonariam 0010 1101, 0010 1101 &c. &c. & sic cæteras sponte sua sequentes, ut etiam observemus, norandum saltem est, ordines à dextra (versus sinistram) in quolibet columna, deorsum semper instituendos esse.

Similiter: prima 01, periodus binaria; secunda 0011, quaternaria; tertia 01011010, octonaria; quarta 00110110 11001001; sedenaria &c. &c. \*\*

Et si hæc, à viginti, ac amplius, annis, jam in mente habuerim, ita raro tamen animum huc adjei, ut de nominibus imponendis non cogitaverim, quia potius soleo enunciare, ad morem vulgaris Arithmeticæ, 10. per decem; 100 per centum; etsi significant 2 & 4. Obiter adjiciam, ex hac expressione. sine ulla demonstratione, sequi: cur nummi, & pondera, progressionis Geometricæ duplæ, apta sint, ut, paucissimis datis, cætera possint componi. Ex. gr. quinque ponderibus unicarum, 1, 2, 4, 8, 16, combinatis confici potest pondus quodcumque unicarum, infra 32. Hinc monetarum examinatores hac progressionem, in pondusculis suis, utuntur. Ejus rei rationem varii indagarunt, & *Schotenius*, inter alios, in miscellaneis, sed per ambages; hic verum primo obtutu patet, ex. gr. quia 29. est 11101. etiam 10000 † 1000 † 100 † 1. erit 16†8†4†1, \*\*\*.

*Cartesianos* præjudicia vetera novis mutasse, dubium nullum est. Recte quidem illi omnia phænomena specialia corporum, per Mechanismos, contingere censent; sed non satis perpexere, ipsos fontes Mechanismi oriri ex altiore causa; quanquam interim *Malebranchio*, *Sturmio*, aliisque insignibus viris, non assentiar, putantibus nihil esse virtutis, actionisque, in materia. Scilicet non satis percipere, quæ sit natura substantiæ, valorisque, quem Deus contulit rebus, qui in se involvit perpetuam actionem. Meo judicio longe aliud est Incorporea substantia, quam extensio, & loci repletio; nempe cogitandum est, quid sit illud, quod locum replet. Spatium, quemadmodum & tempus, nihil aliud sunt, quam ordo

\*\*\*) Has quoque periodos, eadem lege, observabis, modo ex Tabula nostra II. meros *Quinarios* excerpere libuerit, ut in Tab. adjuncta videre est.

\*\*\*\*) Nempe, 16, & 8, & 4, & 1. conficiunt 29. Numerus vero 11101, monstrante Tabula nostra constatur ex 10000 five 16 Similiter: 10000 five 16

1000	8	1000	8
100	4	100	4
1	1	10	2
11101 five 29.		1	

11111 five 31.

0000000	0	ordo possibilium existentiarum ; in spatio simul , in
0000101	5	tempore successive ; realitasque eorum per se nulla
0001010	10	est , extra divinam immensitatem , atque æternita-
0001111	15	tem. Vacuum nullum esse pro certo habeo. In-
0010100	20	terim materiæ , non tantum extensionem , sed & vim
0011001	25	seu nihil , adscribo. Latentque in his alia multo
0011110	30	majoris momenti. Fateor olim mihi interstitiola va-
0100011	35	cua placuisse ; hodie contra sentio ; etsi , ut dixi , ma-
0101000	40	teriæ naturam non collocem in extensione. Puto et-
0101101	45	iam à me monstratum , non esse verum ; quod a-
0110010	50	junt , corpus eam , quam perdit , quantitatem motus
0110111	55	alteri dare. De potentia tamen motrice id verum de-
0111100	60	prehendi. Et sane potentia aliquid reale est ; motus
1000001	65	vero nunquam existit , cum nunquam existat totus ,
1000110	70	non magis quam tempus. Reveraque etiam ex alio
1001011	75	capite imaginaria involvit motus. In quo consistat
&c. &c.		unio animæ , & corporis , commerciumque diversa-

rum substantiarum , problema est , quod puto me sol-  
visse. Qua de re aliquando amplius. Atque hæc ad  
tuas dissertationes volui annotare paucis. Unum  
hoc addens , causam parheliorum ab interfectione  
halonum , à *Gassendo* allatam , mihi quoque placuisse. \*\*\*\*) Et in  
parheliorum explicanda ratione *Cartesium* non recte versatum ap-  
parebit , credo , quando *Dioptrica Hugonii* , posthumum opus ,  
prodibit.

Specimina *Calculi infinitesimalis* , sive *differentialis* , & *sum-*  
*matorii* , à me propositi , ante annos complures , extant in *Actis*  
*Eruditorum*. Ubi primum edidi Anno 1684. Inde *Bernoullii* ,  
*Helvetii* , *Craigius* , *Scotus* , *Marchio Hospitalius* , *Gallus* , miro suc-

Aa 3 cessu

---

\*\*\*\*) *Circuli nostri naturalis* Exercitationi quartæ , de *Qualitatibus sensibilibus* , & *insensibi-*  
*libus* , Additamentum *Historiæ Parheliorum* , d. 24. Mart. Bremæ , post hor. 10. usque  
ad 2. à nobis observatorum , A. 1673. d. 6. Apr. adjiciebat *Dn. M. Jac. Hier. Loeb-*  
*ner* , tum temporis Respondens ; Venerandi quondam Eccles. Cathedral. Bre-  
men[. & vicin. Circuli Superintendentis vigilantissimi Filius ; Regii Athenæ hodie ,  
ac Scholæ Cathedralis , Conrector dignissimus ; Vir & pietate , & erudi-  
tione & multis aliis nominibus insignis , Fautor , & Amicus noster coleandissimus.



cessu sunt secuti. *Nieuventius Baravius* partim carpere, partim in se, mutatis notis, transferre voluit; utrumque frustra: præsertim cum non satis intellixerit, nec aliquid per se in ea re potuerit præstare. In Germania neminem adhuc satis in hæc ingressum esse, sum miratus.

Desunt nobis juvenes spei singularis; messis multa est, operarii autem pauci. Et cum Mathematicæ artes liberaliter alant cultores suos, plerique etiam se discere velle profiteantur, quæ πρὸς τὰ *ἄριστα* faciunt; tamen magis magisque hæc studia, inter nostros homines, sterilescunt. Credo quod nunc plerique inania, aut in speciem adornata, sectantur, quæ delibare sufficit; à veris autem laboribus, quibus peritus excolendus est animus, abhorrent. Sed tuo hortatu, atque exemplo, & paucorum tui simillium, meliora in posterum spero. Vale, dabam Hannoveræ 17. May. 1698.

deditissimus

*Godofredus Guilielmus Leibnitius.*



# ANHANG



# Übersetzungen der Faksimiledrucke

Redaktionelle Anmerkungen sind  
in *Kursiv-Schrift* gesetzt

## I

NIEDERSCHRIFT VOM 15. MÄRZ 1679

S. 1

15. März 1679

### *Das dyadische Zahlensystem. Teil I*

Nebenstehende Folge kann leicht fortgesetzt werden, wenn man, von rechts nach links gehend, unter die Eins der oberen Zahl jeweils 0 schreibt, bis bei der oberen auch 0 vorkommt, worunter man dann 1 schreibt; weiter braucht man nicht zu gehen, da die übrigen Ziffern gleichbleiben wie bei der oberen Zahl.

So wird aus: 1010111 87  
1011000 88

Das ist dasselbe, wie wenn man sagte: 1011000 ist 64

$2^6 + * + 2^4 + 2^3 + * * *$  16  
64 + 16 + 8 88

Zahlenfolge	
1	1
2	10
3	1
4	100
5	1
6	10
7	1
8	1000
9	1
10	10
11	1
12	100
13	1
14	10

15	1
16	10000
17	1
18	10
19	1
20	100
21	1
22	10
23	1
24	1000
25	1
26	10
27	1
28	100
29	1



30		10
31		1
32	100000	
33		1
34		10
35		1
36		100
37		1
38		10
39		1
40		1000
41		1
42		10
43		1
44		100
45		1
46		10
47		1
48		10000
49		1
50		10
51		1
52		100
53		1
54		10
55		1
56		1000
57		1
58		10
59		1
60		100
61		1
62		10
63		1
64	1000000	

65		1
66		10
67		1
68		100
69		1
70		10
71		1
72		1000
73		1
74		10
75		1
76		100
77		1
78		10
79		1
80		10000
81		1
82		10
83		1
84		100
85		1
86		10
87		1
88		1000
89		1
90		10
91		1
92		100
93		1
94		10
95		1
96		100000
97		1
98		10
99		1
100		100

Denn 1 an der vierten Stelle, also 1000, bedeutet die dritte Potenz der Basis des Zahlensystems; wie es nämlich im gewöhnlichen System die dritte Potenz von zehn, also hundert<sup>1)</sup>, bedeutet, so in unserem die dritte Potenz von zwei, nämlich acht. Ähnlich bedeutet 1 an der fünften Stelle die vierte Potenz davon, also 16, an der sechsten bedeutet es die fünfte Potenz, also 32, und an der siebten schließlich die sechste Potenz, also 64.

Zu bemerken ist, wenn man bei der Folge von oben nach unten geht, von einer Ziffer der oberen Zahl zu den direkt darunterstehenden Ziffern der unteren Zahlen, daß die Eins jeweils in regelmäßigen Abständen wiederkehrt, und zwar kommt die Eins an letzter Stelle immer wieder nach einer Null. An der zweiten<sup>2)</sup> Stelle jedoch, die dem Quadrat entspricht, erscheint sie wieder nach drei, an der dritten Stelle, die der dritten Potenz entspricht, nach sieben dazwischenliegenden Nullen, an der vierten Stelle, die der vierten Potenz entspricht, nach fünfzehn.

Von hier aus scheint sich nun ein bequemer Weg zur Umwandlung des dekadischen Ausdrucks einer bestimmten Zahl in den dyadischen an-

<sup>1</sup> Statt »centum« muß es offenbar »mille« heißen.

<sup>2</sup> In diesem Abschnitt ist versehentlich die »unitas« als »quadratica« »in secundo loco« statt »in tertio« angesetzt. Entsprechend ist fortzuführen mit »quarto« und »quinto«.

zubieten. Es handle sich um die Zahl 365; man nehme nacheinander die Hälfte, dann die Hälfte der Hälfte und schreibe jeweils den Rest neben diese halben Werte. Dann ergeben diese Ziffern, wenn sie so nebeneinandergeschrieben werden, daß die unterste ganz nach links kommt usw., den gesuchten dyadischen Ausdruck.

Dieselbe Methode kann zur Umwandlung irgendeiner Zahl des einen Systems in eine des andern angewandt werden:

365		11	0
182	1	5	1
91	0	2	1
45	1	1	0
22	1		1

So wird 365 zu 101101101, nämlich:

100000000	256
1000000	64
100000	32
1000	8
100	4
1	1
	365

Nach ähnlichem Verfahren wird auch eine dyadische Zahl in eine dekadische verwandelt, sei es durch Addieren aller ihrer dekadisch ausgedrückten Zweierpotenzen, wie hier 256, 64, usw., oder auch, indem man die gegebene dyadische Zahl durch den dyadischen Ausdruck von zehn dividiert, wobei jeweils der Rest in der bereits erwähnten Weise zu schreiben ist, z. B.:

101101101 werde geteilt durch 1010  
100100 (1. Quotient)

Rest 101 gleich 5

11 (2. Quotient)

Rest 110 gleich 6

11 gleich 3

1

<del>101101101</del>	}	<del>1101</del>	} 11
<del>101000000</del>		<del>100100</del>	
<del>1011111</del>		<del>101000</del>	
<del>10000</del>		<del>101</del>	
<del>111</del>			

Am linken Rand oben:

011111      Daraus ist ersichtlich, daß  
100000      0 und 1 aufeinanderfolgen:  
100001      zunächst im Wechsel von  
100010      eins, dann von vier, darauf  
100011      von acht usw., in geometri-  
100100      scher Progression. Auf glei-  
100101      che Weise ist auch die Pro-  
100110      gression der Zweier- und  
100111      Dreierzahlen zu untersuchen  
101000      usw., damit klar wird, wel-  
              usw. ches Grundzahlen und wel-  
              ches abgeleitete Zahlen sind. Ebenso  
              die Progression der Potenzen.

Am rechten Rand oben:

Im binären Zahlensystem ist die Multiplikation vollkommen; denn sie geschieht durch bloße Addition, ohne daß, wie sonst, die Pythagoreische Tafel vorausgesetzt wäre.

Das Addieren von Zahlen ist bei dieser Methode so leicht, daß diese

S. 2

nicht schneller diktiert als addiert werden können, so daß man die Zahlen gar nicht zu schreiben braucht, sondern sofort die Summen schreiben kann. Zum Beispiel diktiert man zunächst als erstes: 10110

danach: 11011

Ich schreibe sofort<sup>1)</sup>: 1000001

oder, wenn mehrere 10110110  
Spalten zu addieren 11100101  
sind, z. B.: 1001100  
1010111  
11011011

Man zähle die Ein- 1100011001  
sen in einer Spalte; ist ihre Anzahl gerade<sup>2)</sup>, dann schreibe man eine Eins darunter; und die Hälfte der Anzahl der Einheiten übertrage man auf die folgende Spalte, sei es in Punkten oder in gewöhnlichen Zahlen. So braucht man bei diesem System nur die Einheiten abzählen zu können, während es sonst nötig ist, daß man wenigstens einfache Zahlen addieren kann; z. B.:  $8 + 5 = 13$ ; wer das nicht weiß, der kann im dekadischen System nicht bequem addieren.

Mit der gleichen Methode geht auch die Subtraktion sehr leicht vonstatten und sogar auch die Vermischung von Subtraktion und Addition. Es sind nämlich nur die Ein-

<sup>1</sup> Diese Addition muß fehlerhaft sein, es müßte nach »scribo statim« heißen: 110001.

<sup>2</sup> Statt »par« muß es wohl »impar« heißen (»ungerade«).

heiten zusammenzufassen. Wenn allerdings Addition und Subtraktion vermischt sind, muß auf jede zu subtrahierende Einheit eine zu addierende angerechnet werden, denn diese heben sich gegenseitig auf. Zum Beispiel beginne man in der Spalte A bei L, wo 1 mit einem Pluszeichen steht. Also ist diese 1 zugleich mit der anderen 1, die mit einem Minuszeichen bei P steht, mit einem Punkt zu versehen. Ebenso steht +1 bei M. Es erhält zugleich mit -1 bei S einen Punkt. Schließlich steht +1 bei N, es erhält ebenso wie -1 bei W einen Punkt. Alle (-1) sind mit einem Punkt versehen, und übrig sind nur noch die (+1) ohne Punkt, die abgezählt werden, wie wenn sie allein dastünden, und mit ihren Vorzeichen auf die folgende Spalte zu übertragen sind, hier mit +, sonst mit -, wenn es mehr (-1) waren.

A		A	
L 1·+	R 1 +	+ 10110111	+ 1
M 1·+	S 1·-	+ 1001101	- 1
N 1·+	T 1 +	+ 1010101	+ 1
P 1·-	V 1 +	- 1110011	+ 1
Q 0 -	W 1·-	- 0	- 1

Es ist auch zu beachten, daß für eine zu subtrahierende Zahl ihr Supplement auf 1000000 usw. eingesetzt werden kann, und dann braucht man keine Subtraktion, sondern nur die Addition, nach dem Verfahren, das ich

auch für das dekadische System anderswo dargelegt habe.

Beispiel: Zu subtrahieren ist die Zahl:  
 110101  
 Angenommen, sie sei  
 zu subtrahieren von: 1000000  
 dann ergibt das offenbar: 001011  
 Denn wenn man  
 dazu addiert: 110101  
 ergibt es wieder: 1000000

Man kann aber sofort solche Supplementzahlen hinschreiben, wenn man unter der ersten Ziffer rechts die ursprüngliche, bei den übrigen aber jeweils die gegenteilige (Ziffer des Subtrahenden) einsetzt, also 0 in 1 verwandelt. Schließlich ist am Ende zu beachten, daß von der folgenden Spalte, bis zu der keine Ziffer des Subtrahenden hinreicht, eine Einheit zu subtrahieren ist, wenn wir die Subtraktion durch bloße Addition mit Hilfe von Supplementen durchführen wollen.

S. 3 Ich gehe nun zur Multiplikation über. Hier ist es wiederum klar, daß man sich nichts Leichteres vorstellen kann. Denn man braucht keine Pythagoreische Tafel<sup>1)</sup>, und diese Multiplikation ist die einzige, die

<sup>1</sup> Pythagoreische Tafel: Tabelle mit quadratischer Anordnung des Einmaleins. (Siehe: Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, Bd. I S. 144)

<sup>2</sup> entspricht:  $93 \cdot 14 = 1302$

<sup>3</sup> - [...] bzw. [...] bedeutet: im Manuskript durchgestrichen oder als durchgestrichen zu betrachten.

keine andere als bereits bekannt voraussetzt. Man schreibt nämlich nur die Zahl oder an ihrer Stelle 0.

$$\begin{array}{r}
 1011101 \quad 2) \\
 \underline{\phantom{1011101}1110} \\
 10111010 \\
 1011101 \\
 \underline{\phantom{1011101}1011101} \\
 10100010110
 \end{array}$$

Diese Art Kalkül könnte auch mit einer Maschine ausgeführt werden [ohne Räder]<sup>3)</sup>. Auf folgende Weise sicherlich sehr leicht und ohne Aufwand: [mit einer Dose – einer Dose mit Löchern – diese – an den Stellen, die entsprechen – wo . . . ist – deren Löcher geöffnet und geschlossen werden können – es sollen die den . . . entsprechenden geöffnet werden – mit einer kleinen Maschine mit zwei-zähligen Rädern, welche –]

Eine Büchse soll so mit Löchern versehen sein, daß diese geöffnet und geschlossen werden können. Sie sei offen an den Stellen, die jeweils 1 entsprechen, und bleibe geschlossen an denen, die 0 entsprechen. Durch die offenen Stellen lasse sie kleine Würfel oder Kugeln in Rinnen fallen, durch die anderen nichts. Sie werde so bewegt und von Spalte zu Spalte verschoben, wie die Multiplikation es erfordert. Die Rinnen sollen die Spalten darstellen, und kein Kügelchen soll aus einer Rinne in eine



Titel

GESCHICHTE  
DER  
KÖNIGLICHEN AKADEMIE  
DER WISSENSCHAFTEN

Jahrgang 1703

Mit den Mathematik- und  
Physik-Abhandlungen  
für das gleiche Jahr

*Auszug aus den Registern  
dieser Akademie*

Gedruckt in Paris  
bei Jean Boudot, Hofdruckerei  
und Druckerei der  
Königlichen Akademie  
der Wissenschaften,  
Rue S. Jacques au Soleil d'or,  
bei der Fontaine S. Severin.

1705

Mit königlicher Genehmigung

ERKLÄRUNG  
DER BINÄREN ARITHMETIK,

S. 85

*die sich einzig der Zahl-Zeichen 0 und 1  
bedient; mit Bemerkungen über ihre Nütz-  
lichkeit und über den Sinn, den sie den alten  
chinesischen Zeichen Fo-bis verleiht.*

VON G. W. LEIBNIZ

5. Mai 1703

Die gewöhnliche arithmetische Rechenweise basiert auf dem Dezimalsystem, das heißt der Progression von zehn zu zehn. Man verwendet dabei zehn Zahl-Zeichen, nämlich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, die für null, eins und die folgenden Zahlen einschließlich neun stehen. Bei zehn fängt man wieder von vorne an und gibt *zehn* mit 10 wieder; und zehn mal zehn oder *hundert* mit 100; und zehn mal hundert oder *tausend* mit 1000; und zehn mal tausend mit 10000. Und so weiter.

Doch statt des Dezimalsystems verwende ich seit einigen Jahren das einfachste aller Systeme, das Binärsystem, das heißt, die Progression von zwei zu zwei, da ich festgestellt habe, daß es zur Vervollkommnung der

Wissenschaft von den Zahlen beiträgt. Ich verwende dabei als Zahlzeichen nur 0 und 1; und bei zwei fange ich wieder von vorne an. *Zwei* wird hier also mit 10 wiedergegeben, und zwei mal zwei oder *vier* mit 100; und zwei mal vier oder *acht* mit 1000; und zwei mal acht oder *sechzehn* mit 10000, und so weiter. Hier ist eine nach diesem System aufgestellte Zahlentafel, die man beliebig fortsetzen kann.

S. 86

Man sieht auf den ersten Blick den Grund für eine berühmte Eigenschaft der binären geometrischen Reihe mit ganzen Zahlen, eine Eigenschaft, die bewirkt, daß, wenn man nur eine dieser Zahlen hat, man unterhalb des Doppels des höchsten Glieds alle anderen ganzen Zahlen daraus bilden kann. Es ist wie wenn man zum Beispiel sagte, daß 7, dargestellt durch 111, die Summe aus vier und zwei und eins ist. Und daß 13, dargestellt durch 1101, die Summe aus acht, vier und eins ist. Diese Eigenschaft wird von den Probierern beim Wiegen aller Arten geringgewichtiger Massen ausgenützt und könnte auch in den Münzen dienen, um verschiedenste Beträge mit wenig Stücken darzustellen.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	
1	1
⊖101	13

### Zahlentabelle

◦ ◦ ◦ ◦ ◦	0	0			
◦ ◦ ◦ ◦ ◦	◦	1			
◦ ◦ ◦ ◦ ◦	1	0			
◦ ◦ ◦ ◦ ◦	1	1			
◦ ◦ ◦ ◦	1	0	0		
◦ ◦ ◦ ◦	1	0	1		
◦ ◦ ◦ ◦	1	1	0		
◦ ◦ ◦ ◦	1	1	1		
◦ ◦	1	0	0	0	
◦ ◦	1	0	0	1	
◦ ◦	1	0	1	0	
◦ ◦	1	0	1	1	
◦ ◦	1	1	0	0	
◦ ◦	1	1	0	1	
◦ ◦	1	1	1	0	
◦ ◦	1	1	1	1	
◦	1	0	0	0	0
◦	1	0	0	0	1
◦	1	0	0	1	0
◦	1	0	0	1	1
◦	1	0	1	0	0
◦	1	0	1	0	1
◦	1	0	1	1	0
◦	1	0	1	1	1
◦	1	1	0	0	0
◦	1	1	0	0	1
◦	1	1	0	1	0
◦	1	1	0	1	1
◦	1	1	1	0	0
◦	1	1	1	1	0
◦	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
usw.					usw.

Mit diesem Zahlensystem kann man ganz leicht alle Arten von Rechenoperationen durchführen.

Für die *Addition* zum Beispiel

$$\begin{array}{r|l} \square 110 & 6 \\ 111 & 7 \\ \hline 1101 & 13 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 101 & 5 \\ 1011 & 11 \\ \hline 10000 & 16 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1110 & 14 \\ 10001 & 17 \\ \hline 11111 & 31 \end{array}$$

Für die *Subtraktion*

$$\begin{array}{r|l} 1101 & 13 \\ 111 & 7 \\ \hline 110 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10000 & 16 \\ 1011 & 11 \\ \hline 101 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11111 & 31 \\ 10001 & 17 \\ \hline 1110 & 14 \end{array}$$

Für die *Multiplikation*

$$\begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ 11 & 3 \odot \\ \hline 11 & \\ 11 & \\ \hline 1001 & 9 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 101 & 5 \\ 11 & 3 \\ \hline 101 & \\ 101 & \\ \hline 1111 & 15 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 101 & 5 \\ 101 & 5 \\ \hline 101 & \\ 1010 & \\ \hline 11001 & 25 \end{array}$$

Für die *Division*

$$\begin{array}{r|l} 15 & \left( \begin{array}{l} \cancel{X} \cancel{X} 1 1 \\ \cancel{X} \cancel{X} \cancel{X} 1 \\ \cancel{X} 1 \end{array} \right) 101 & 5 \\ 3 & \left( \begin{array}{l} \cancel{X} \cancel{X} \cancel{X} 1 \\ \cancel{X} 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Und alle diese Operationen sind so einfach, daß man weder zu probieren braucht noch zu erraten, wie bei der gewöhnlichen Division. Man braucht auch nichts auswendig zu lernen wie beim gewöhnlichen Rechnen, wo man zum Beispiel wissen muß, daß 6 und 7

zusammen 13 ergeben; und daß 5 mit 3 multipliziert 15 ergibt nach dem sogenannten pythagoreischen Einmal-eins. Beim Binärsystem wird alles direkt gefunden und bewiesen, wie aus den mit  $\square$  und  $\odot$  bezeichneten Beispielen ersichtlich ist.

Ich empfehle jedoch nicht, dieses Rechensystem an die Stelle der praktischen Dezimalmethode zu setzen. An diese Methode ist man nicht nur gewöhnt, man braucht dabei auch nicht zu suchen, was man bereits auswendig gelernt hat; die Dezimalmethode ist bündiger, und die Zahlen sind nicht so lang. Und wenn man nach dem Zwölfer- oder Sechzehner-System rechnen würde, wäre das noch vorteilhafter. Aber das Binärsystem, das heißt, das Rechnen mit 0 und 1, ist trotz seiner Länge das grundlegendste System für die Wissenschaft und führt zu neuen Entdeckungen, die dann für den Umgang mit Zahlen und vor allem für die Geometrie nützlich sind. Wenn die Zahlen auf ihre einfachsten Prinzipien wie 0 und 1 reduziert werden, dann herrscht überall eine wunderbare Ordnung. So sieht man auf der Zahlentafel in jeder Spalte Perioden, die immer wieder von vorne beginnen. In der ersten Spalte ist es 01, in der zweiten 0011, in der dritten 00001111, in der vierten 0000000111111111 und so weiter.

Um den Leerraum an jedem Spaltenanfang zu füllen und um diese Perio-

S. 87



den besser zu bezeichnen, wurden kleine Nullen eingesetzt. Ferner wurden Linien angebracht, die besagen, daß das, was sie einschließen, periodisch wiederkehrt. Die Quadratzahlen, Kubikzahlen und andere Potenzen sowie die Dreieckzahlen, Pyramidalzahlen und andere figurierte Zahlen haben dabei ähnliche Perioden. Man kann die Tafeln also unverzüglich aufstellen, ohne zu rechnen. Und eine gewisse Umständlichkeit zu Beginn, die einem dann das Rechnen erspart und erlaubt, ad infinitum nach der Regel vorwärts zu gehen, ist unendlich vorteilhaft.

Das Überraschende daran ist, daß diese Arithmetik mit 0 und 1 den Schlüssel liefert zum Geheimnis der Linien-Zeichen eines alten Königs und Philosophen, genannt Fo-hi, der vor mehr als viertausend Jahren gelebt haben soll und den die Chinesen als den Gründer ihres Reiches und ihrer Wissenschaften betrachten. Es gibt einige Linien-Zeichen, die man ihm zuschreibt. Sie haben alle Bezug auf diese Arithmetik; man braucht nur das sogenannte *Acht-Cova-Zeichen* einzusetzen, das als Grundzeichen gilt, und die Erklärung anzufügen, die ins Auge springt, nämlich daß erstens eine durchgehende Linie eine Einheit oder 1 bedeutet und daß zweitens eine unterbrochene Linie für Null oder 0 steht.

☰☰☰	☰☰☰	☰☰☰	☰☰☰	☰☰☰	☰☰☰	☰☰☰	☰☰☰
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	10	11	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

Die Chinesen wissen seit etwa tausend Jahren nicht mehr, was die Cova- oder Linien-Zeichen des Fo-hi bedeuten; sie haben Kommentare darüber verfaßt, in denen sie einen ich weiß nicht wie weit hergeholtten Sinn für diese Zeichen suchten, so daß die richtige Erklärung ihnen jetzt von den Europäern kommen mußte. Das geschah folgendermaßen: Vor nicht ganz zwei Jahren teilte ich dem Pater Bouvet, einem berühmten französischen Jesuiten, der in Peking lebt, meine Zählmethode mit 0 und 1 mit, und er sah in ihr sofort den Schlüssel zu den Figuren des Fo-hi. Als er mir am 14. November 1701 schrieb, schickte er mir die große Figur dieses königlichen Philosophen, die bis 64 geht und keinen Zweifel an der Wahrheit unserer Auslegung läßt. Man kann also sagen, daß dieser Pater das Rätsel des Fo-hi mit Hilfe meiner Angaben entziffert hat. Und da diese Figuren das älteste Denkmal der Wissenschaft darstellen, das auf der Welt existiert, erscheint ihre Ent-rätselung nach so langer Zeit um so denkwürdiger.

Die Übereinstimmung der Figuren des Fo-hi mit den Zahlen meiner

Tafel tritt klarer hervor, wenn man auf der Tafel Anfangs-Nullen einsetzt, die überflüssig scheinen, die aber dazu dienen, die Periode der Spalte zu markieren (ich habe diese Nullen, um sie von richtigen Nullen zu unterscheiden, durch kleine Kreise wiedergegeben); und diese Übereinstimmung gibt mir eine hohe Meinung von der Tiefe der Überlegungen des Fo-hi. Denn was uns jetzt einfach erscheint, war in diesen weit zurückliegenden Zeiten beileibe nicht einfach. Die binäre oder dyadische Arithmetik ist, wenn man sich nur ein wenig damit beschäftigt, leicht zu handhaben, weil uns dabei unsere Art zu zählen sehr zustatten kommt (es scheint, daß man dabei nur das, was zuviel ist, wegnimmt). Aber die gewöhnliche Dezimal-Arithmetik dürfte nicht sehr alt sein, zumindest kannten die Griechen und Römer sie nicht und konnten sich daher ihre Vorteile nicht zu eigen machen. Europa verdankt die Einführung dieser Arithmetik wahrscheinlich Gerbert, der unter dem Namen Sylvester II. Papst wurde und der sie

von den Mauren Spaniens übernahm. In China glaubt man ferner, daß Fo-hi der Erfinder der chinesischen Schriftzeichen ist, die sich dann im Laufe der Zeit sehr stark veränderten; seine Arithmetikabhandlung läßt vermuten, daß, wenn es gelänge, den Ursprung der chinesischen Schrift zu finden, man dadurch wichtige Hinweise auf die Fo-hischen Zahlen und Ideen bekäme. Diese Vermutung ist um so begründeter, als man in China annimmt, daß Fo-hi die Schriftzeichen von den Zahl-Zeichen abgeleitet hat. Pater Bouvet hat vor, in dieser Richtung zu forschen, und er ist sehr wohl fähig, zu Resultaten zu gelangen. Aber ich weiß nicht, ob die chinesische Schrift je annähernd den Vorteil geboten hat, den notwendigerweise eine Methode, wie ich sie plane, mit sich bringt. Wenn ja, dann könnte jede Schlußfolgerung, die aus Begriffen gezogen werden kann, auch aus ihren Schriftzeichen gezogen werden mit Hilfe einer Rechenmethode, die eine der wichtigsten Hilfsmittel des menschlichen Geistes darstellt.

Titel GOTTFRIED WILHELM

LEIBNIZ

*Seiner Kaiserlichen Majestät Rat  
sowie Seiner Königlichen Majestät  
von Britannien Geheimer Justizrat  
und Geschichtsschreiber*

SÄMTLICHE WERKE

Erstmals gesammelt,  
nach Klassen geordnet,  
mit Vorreden und Registern versehen

von

LUDWIG DUTENS

DRITTER BAND

*MATHEMATISCHE WERKE*

Vignette:

Was du nicht willst, daß man dir tu',  
das füg' auch keinem andern zu.

GENF

GEBRÜDER DE Tournes

1768

I.

S. 183

O bgleich Herr Sander<sup>1)</sup> in meinem Namen mehr erbeten hat, als ich selbst gewagt hätte, da ich Ihre Zeit nicht ungebührlich beanspruchen wollte, so war dies doch von größtem Vorteil für mich; denn über Ihren freundlichen Brief samt den Beigaben habe ich mich sehr gefreut und fühle mich dafür zu besonderem Dank verpflichtet<sup>2)</sup>. Beide Erörterungen, die Sie mir zugesandt haben, sind für mich von sehr interessantem Inhalt; denn die unter den Grabhügeln entdeckten Gefäße, um welche es in den Darlegungen von Blum<sup>3)</sup> geht, geben eine Vorstellung von der Frühzeit dieser Gegenden. Besonders aber die praktische Anwendung des mathematischen Kalküls und daneben die semi-

<sup>1)</sup> Kandidat des Rechts in Bremen, seit langer Zeit verschieden.

<sup>2)</sup> »Die Mathematik und ihre Eigenart in Anwendung auf die Theologie«, die ich unter Sturms Vorsitz in Altdorf am 9. Juni 1694 in Grundzügen dargestellt habe, kam zufällig auch dem berühmten Leibniz in die Hände und bildete den Anlaß zu diesem Briefwechsel.

<sup>3)</sup> Blum unterbreitete mit seinen Thesen den im Herzogtum Bremen gemachten Fund eines Grabes und einiger Gefäße am 1. März im Königlichen Athenäum in Bremen unter meinem Vorsitz der wissenschaftlichen Erörterung.

mathematischen Überlegungen bezüglich metaphysischer Fragen – beides habe ich in Knolles Darlegungen gefunden – entsprechen ganz meinem Geschmack. Ich hätte gern eine Skizze der Gefäße und der übrigen Gegenstände, die Sie im Vorwort erwähnen. Auch möchte ich wünschen, daß Herr Knolle diese so glücklich unternommenen Studien erfolgreich fortsetzen möge. Ich fand, daß sich seine metaphysische Überlegung durch eine gewisse Schönheit und Tiefe auszeichnet und – wenn ich dies beifügen darf – auch meinen eigenen Vorstellungen entspricht<sup>1</sup>).

Sicherlich gehören Enden oder Grenzen zum Wesen der Geschöpfe; Grenzen sind aber etwas Privatives und bestehen in der Negation weiteren Fortschritts. Man muß indes folgendes zugeben: das Geschöpf enthält, nachdem es einmal seinen Wert von Gott empfangen hat, und wie es sich unseren Sinnen darbietet, auch etwas Positives, d. h. es hat etwas über seine Grenzen hinaus und kann daher nicht auf bloße Grenzen, auf Unteilbares zurückgeführt wer-

den. Daher kann man – wohl auch im Sinne des Verfassers der Thesen selbst – das Postulat, aus dem eine Rückführbarkeit auf bloße Grenzen, auf rein Unteilbares folgt, nicht auf das in seinem Wertbestand betrachtete Geschöpf anwenden. Da dieser Wert in etwas Positivem besteht, ist er ein Grad geschaffener Vollkommenheit, der auch Wirkkraft beinhaltet, und diese macht nach meiner Meinung das Wesen der Substanz aus. Daher ist jener von Gott mitgeteilte Wert wirklich eine Mächtigkeit, eine den Dingen eingegebene Kraft. Manche bestreiten dies zu unrecht und merken nicht, daß sie sich so unversehens in der Lehre Spinozas verfangen, der Gott allein zur Substanz erklärt, alles übrige zu dessen »Modi«.

So haben die Dinge ihren Ursprung aus Gott und dem Nichts, aus Positivem und Privativem, aus Vollkommenheit und Unvollkommenheit, aus Wert und Begrenzung, aus Aktivem und Passivem, aus Form (d. h. Entelechie, Drang, Mächtigkeit) und Materie oder Masse, die an sich untätig ist, außer daß sie Widerstand bietet. Dies habe ich an dem von mir beobachteten Ursprung der Zahlen aus 0 und 1 etwas anschaulich gemacht. Er ist ein schönes Kennzeichen der ständigen Erschaffung der Dinge aus dem Nichts und ihrer Abhängigkeit von Gott. Denn wenn man die einfachste Progression an-

<sup>1</sup> Herr Adam Andreas Knolle selig, ein Vogtländer, sprach nach Abschluß seiner akademischen Studien, bevor er in der Gegend von Nürnberg ein geistliches Amt antrat, im Juni 1697 in der erwähnten Schule unter meinem Vorsitz über »einige Forderungen der philosophischen Mathematik«, die sich aus analytischen Prinzipien der Algebra und semi-mathematischer Metaphysik ergeben, und stellte sie öffentlich zur Diskussion.

wendet, nämlich die dyadische, anstelle der dekadischen oder quaternarischen, dann lassen sich alle Zahlen durch 0 und 1 ausdrücken, wie aus nebenstehender Tabelle ersichtlich ist. Dieser Aufbau der Zahlen entspricht am meisten der Natur und enthält erstaunliche Anregungen zum Nachdenken und auch für die Praxis, wenn auch nicht für den allgemeinen Gebrauch.

0	0	101	5
1	1	110	6
10	2	111	7
11	3	1000	8
100	4		

S. 185 Im übrigen bitte ich Sie, Herrn Knolle bei Gelegenheit auch in meinem Namen (wenn es angebracht scheint) zu ermutigen, mit diesen vortrefflichen Überlegungen fortzufahren. Ich würde gern öfter Ähnliches von ihm sehen, sei es nun über Mathematik oder jene »höhere Philosophie«. Auch sollte man ihn meiner Ansicht nach zur Pflege jener höheren Mathematik ermuntern, zu der die »Wissenschaft vom Unendlichen« gehört. Einige ihrer Elemente habe ich dargestellt, als ich einen neuartigen Kalkül vorlegte. Diesen haben Huygens und andere bedeutende Männer mit Beifall aufgenommen. Jetzt haben ihn besonders die Herren Gebrüder Bernoulli und in einer eigenen Abhandlung auch Herr Marquis de

l'Hôpital, ein Franzose, erläutert. Man ist allgemein der Ansicht, daß sich auf keine andere Weise ein besserer Zugang von der Geometrie zur Natur hin auftut, die, wie ich glaube, bei jeder Veränderung über unendlich viele Zwischenstufen fortschreitet und darin das Gepräge des unendlichen Urhebers an sich trägt. Ihre Mitteilungen über unser Verhältnis zur Sonne nach dem berühmten Astronomen Herrn Eimmart, die Sie mir früher einmal zukommen ließen, halte ich für sehr zutreffend, wenn wir annehmen, daß die Erde zu den Planeten, den Trabanten der Sonne gehört. Sollte etwas Tieferes zugrunde liegen, dann muß ich gestehen, daß ich die Absicht des Verfassers nicht durchschaut habe. Der hervorragende Mathematiker Newton glaubt, die Wirbeltheorie der Sternanziehung sei aufzugeben, aber mir scheint, wie ich es schon in der Leipziger Gelehrtenzeitschrift veröffentlicht habe, man kann sie nicht nur beibehalten, sondern durch die harmonische Kreisbewegung, deren erstaunliche Eigenschaften ich entdeckt habe, läßt sie sich sogar sehr schön weiterführen.

Über Eimmarts Beobachtungen würde ich gern einmal Genaueres erfahren, und auch Ihre sachkundigen Bemerkungen dazu wären mir sehr willkommen. Aber ich weiß wohl, daß Sie überaus beschäftigt sind, und

zu meinem Bedauern ist auch Ihre Gesundheit etwas angegriffen. Daher wünsche und erhoffe ich für Sie wieder besseres Befinden – wenn Sie sich nur zur rechten Zeit etwas schonen wollten! Das möchte ich Ihnen empfehlen. Leben Sie wohl!

Gegeben zu Hannover am 29. März 1698

Ihr sehr ergebener  
Gottfried Wilhelm Leibniz

II.

S. 186

Für Ihre vortrefflichen Abhandlungen sowie die feinen Skizzen der Gefäße bin ich Ihnen sehr verbunden, und ich würde mich freuen, wenn ich mich Ihnen auch irgendwie erkenntlich zeigen könnte. Meine Vorstellungen bezüglich der dyadischen Progression haben Sie sehr gut erfaßt und klar gesehen, in welcher schöner Ordnung dabei alles vor sich geht. Ich denke aber, daß sie auch für die Förderung der Wissenschaft von Bedeutung sein wird, mag sie auch sonst auf das gewöhnliche Rechnen nicht anwendbar sein. Man wird feststellen, daß entsprechend den verschiedenen Eigenschaften der Zahlen auch die Ziffern nach bestimmtem Gesetz fortschreiten; denn es gilt die allgemeine Regel: wo eine Ordnung der Prinzipien vorliegt, da richtet sich auch alles Abgeleitete nach einer Ordnung. Darüber habe ich mir hier schon lange Gedanken gemacht. Zu-

nächst zeigt sich, daß in natürlicher Reihenfolge aufgestellte Zahlen in der Weise fortschreiten, daß die erste Ziffer rechts jeweils 0 oder 1 ist usw., die zweite 0 (zweimal) oder 1 (zweimal) usw., die dritte 0 (viermal) oder 1 (viermal) usw., die vierte 0 (achtmal) oder 1 (achtmal) usw., die fünfte 0 (sechzehnmal) oder 1 (sechzehnmal) und so weiter.

Auf diese Weise sieht man, daß an erster Stelle immer eine zweistellige Periode, nämlich 01, wiederkehrt; an zweiter Stelle eine vierstellige, 0011; an dritter eine achtstellige; an vierter eine sechzehnstellige und so fort.

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	10
0011	3	1011	11
0100	4	1100	12
0101	5	1101	13
0110	6	1110	14
0111	7	1111	15 usw.

Besonders bemerkenswert ist aber die Tatsache, daß sich dieselbe gesetzmäßige Folge feststellen läßt, wenn man nicht alle Zahlen der Reihe nach, sondern nur jede zweite nimmt und jeweils eine ausläßt; dann ergeben sich nämlich lauter gerade oder lauter ungerade Zahlen. Oder auch, wenn man jede dritte, d. h. alle Dreierzahlen, alle durch 3 teilbaren Zahlen nimmt; desgleichen bei allen Vierer- oder Fünferzahlen usw. Auch dort

S. 187

ergeben sich solche Perioden wie bei natürlicher Folge. Nehmen wir als Beispiel die Dreierzahlen: da finden wir an erster Stelle rechts die zwei-stellige Periode 01, an zweiter die vierstellige 0110, an dritter die acht-stellige 00101101, an vierter die sech-zehnstellige 0001110011100011, an fünfter 000000111110000011111100-00011111 usw.

Es ist zu bemerken, daß hier die Ziffern der einen Periodenhälfte je-weils den entsprechenden der ande-ren Hälfte entgegengesetzt sind.

Z. B.:  $\left. \begin{array}{l} 0001110011100011 \\ \text{besteht aus } 00011100 \\ \text{und aus } 11100011 \end{array} \right\}$

wobei 0 und 1 vertauscht sind.

0000000	0	0110011	51
0000011	3	0110110	54
0000110	6	0111001	57
0001001	9	0111100	60
0001100	12	0111111	63
0001111	15	1000010	66
0010010	18	1000101	69
0010101	21	1001000	72
0011000	24	1001011	75
0011011	27	1001110	78
0011110	30	1010001	81
0100001	33	1010100	84
0100100	36	1010111	87
0100111	39	1011010	90
0101010	42	1011101	93
0101101	45	1100000	96
0110000	48	1100011	99 <sup>1)</sup> usw.

Wenn man solchen und ähnlichen Beobachtungen nachgeht, stößt man auf ganz neue, erstaunliche, auch prak-tisch bedeutsame Eigenschaften der Zahlen. Um es kurz zu sagen: hierin liegt eine theoretische Arithmetik neuer Art beschlossen, die wir mit Ihnen als göttlich bezeichnen können, die aber vorerst nur in ihren Ansätzen sichtbar ist. Zweifellos werden auch Quadrat-, Kubik- und andere poten-zierte Zahlen ganz bestimmte Gesetz-mäßigkeiten in ihrer Progression auf-weisen.

Ähnlich hat hier die erste Periode 01 zwei, die zweite 0011 vier, die dritte 01011010 acht, die vierte 0011011011001001 sechzehn Stellen usw.<sup>2)</sup>

Obgleich ich dies schon seit zwan-zig und mehr Jahren mit mir herum-trage, habe ich doch so selten meine

S. 188

<sup>1</sup> Wenn man unsere Leibniztabelle II fortsetzt - wir haben das einmal anderswo der Übung halber und gleichsam als unterhaltsame Spielerei getan bis zur Zahl 256, welche in dyadischer Form als 100000000 erscheint -, dann erfaßt man nicht nur diese Dreierzahlen, sondern auch alle dazwischen-liegenden Zahlen, die hier nicht aufgeführt sind, mit einem Blick. Um auch die Perioden zu beobach-ten - (hier bei den Dreierzahlen:) als erste die zwei-stellige 01,01,01 usw., als zweite die vierstellige 0110,0110 usw., als dritte die achtstellige 00101101, 00101101 usw. und ebenso die übrigen, die sich ganz von selbst ergeben -, muß man nur darauf achten, daß die Reihen in jeder Spalte (von der rechten nach links fortschreitend) jeweils von oben nach unten zu bilden sind.

<sup>2</sup> Auch diese Perioden wird man nach derselben Gesetzmäßigkeit beobachten, wenn man aus un-serer Tabelle II nur die Fünferzahlen herausgreift.

Aufmerksamkeit darauf gerichtet, daß ich nicht über eigene Bezeichnungen dafür nachgedacht habe; denn ich pflege eher, wie bei der gewöhnlichen Arithmetik 10 als zehn, 100 als hundert zu lesen, auch wenn sie einmal zwei und vier bedeuten. Aus dieser Ausdrucksweise geht übrigens ohne weiteren Beweis hervor, warum es bei Münzen und Gewichten, die in geometrischer Progression durch Verdoppelung aufeinander folgen, möglich ist, mit der kleinsten Anzahl von Gegebenen alle übrigen Werte zusammenzusetzen.

Zum Beispiel läßt sich mit fünf Gewichten von jeweils 1, 2, 4, 8 und 16 Einheiten durch Kombination jedes Gewicht unter 32 Einheiten herstellen. Daher gebrauchen die Münzprüfer bei ihren kleinen Gewichten diese Progression. Nach dem Grund dafür haben schon verschiedene geforscht, unter anderen auch van Schooten in seinen vermischten Schriften, allerdings nicht unmittelbar. Hier dagegen ist es auf den ersten Blick einleuchtend. Weil z. B.  $29 = 11101$  ist, muß auch  $10000 + 1000 + 100 + 1 = 16 + 8 + 4 + 1$  sein<sup>1</sup>).

<sup>1</sup>  $16 + 8 + 4 + 1$  ergibt nämlich 29. Die Zahl 11101 entsteht aber, wie die Tabelle zeigt, aus:

		Ähnlich:	10000 bzw. 16	
10000 bzw. 16			1000	8
1000	8		100	4
100	4		10	2
1	1		1	1
11101 bzw. 29			11111 bzw. 31	

Es besteht kein Zweifel, daß Descartes' Anhänger nur alte mit neuen Vorurteilen vertauscht haben. Zu Recht sind sie zwar der Ansicht, daß alle besonderen Phänomene der Körper durch Mechanismen zustandekommen, doch haben sie nicht genügend durchschaut, daß auch die Quellen eines Mechanismus aus höherer Ursache entspringen. Ich stimme jedoch Malebranche, Sturm und anderen bedeutenden Männern nicht zu, die annehmen, es gebe keinerlei Kraft und Wirksamkeit in der Materie. Sie haben nämlich das Wesen der Substanz und des Wertes nicht genügend erfaßt, den Gott, der ständige Tätigkeit in sich schließt, den Dingen zugeweiht hat. Meiner Meinung nach liegt in der körperlichen Substanz noch etwas ganz anderes als Ausdehnung und Ortsausfüllung. Man muß nämlich bedenken, was das ist, was da einen Ort ausfüllt. Raum sowie Zeit sind nichts anderes als eine Ordnung für mögliche Existenzen; beim Raum im Nebeneinander, bei der Zeit im Nacheinander; an sich kommt diesen aber außerhalb der göttlichen Unermeßlichkeit und Ewigkeit keinerlei Realität zu. Ich bin überzeugt, daß es keinen leeren Raum gibt; doch schreibe ich der Materie Kraft oder Drang zu. Damit hängen noch andere, viel wichtigere Dinge zusammen. Ich gebe zu, daß ich früher einmal kleinste leere



Zwischenräume annahm; heute denke ich anders, wenn ich auch – wie gesagt – das Wesen der Materie nicht in die Ausdehnung verlege. Auch glaube ich, die Ansicht widerlegt zu haben, daß ein Körper das Maß an Bewegung, das er verliert, dem andern mitteilt. Für die Bewegungspotenz trifft dies jedoch zu, wie ich nachgewiesen habe, und zweifellos ist die Potenz etwas Reales; die Bewegung jedoch existiert nie, weil sie nie als gesamte existiert, so wenig wie die Zeit. Tatsächlich hat die Bewegung noch in anderer Hinsicht den Charakter des bloß Vorgestellten an sich.

0000000	0	0101000	40
0000101	5	0101101	45
0001010	10	0110010	50
0001111	15	0110111	55
0010100	20	0111100	60
0011001	25	1000001	65
0011110	30	1000110	70
0100011	35	1001011	75 usw.

Die Frage, worin die Verbindung von Seele und Leib und die Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Substanzen besteht, glaube ich gelöst zu haben. Darüber später einmal mehr. Dies wollte ich nur kurz zu Ihren Ausführungen bemerken; nur dies sei noch erwähnt, daß auch mir die von Gassendi vorgelegte Begründung der Nebensonnen aus der Überschneidung der Halos gefallen hat<sup>1</sup>). Daß

Descartes bei der Erklärung der Nebensonnen nicht auf dem rechten Wege war, wird wohl deutlich werden, wenn die Dioptrik von Huygens als posthumes Werk erscheint.

Die Proben der von mir vor mehreren Jahren entwickelten Infinitesimal-, d. h. Differential- und Integralrechnung sind in der Gelehrtenzeitschrift zu finden, von der ich die erste im Jahre 1684 veröffentlicht habe. Seither sind die Schweizer Bernoulli, der Schotte Craig und der Franzose de l'Hôpital mit glänzendem Erfolg den gleichen Weg gegangen. Der Holländer Nieuwentijt wollte das Erreichte teils bemängeln, teils unter anderen Bezeichnungen für sich selbst beanspruchen; beides vergebens, zumal er es nicht ganz erfaßt hat und selber auf diesem Gebiet nichts Eigenes zu leisten vermochte. Ich wundere mich, daß in Deutschland noch niemand so recht in die Sache eingedrungen ist.

Es fehlt uns an jungen Leuten, die zu außerordentlichen Hoffnungen be-

<sup>1</sup> Die vierte Übung unseres naturwissenschaftlichen Kreises über sinnlich wahrnehmbare und nicht wahrnehmbare Eigenschaften wurde am 6. April 1698 von Herrn M. Jak. Hier. Lochner, dem damaligen Leiter, durch einen Bericht über die von uns in Bremen am 24. März von 10 bis 2 Uhr beobachteten Nebensonnen ergänzt. Er ist der Sohn des Ehrwürdigen ehemaligen Superintendenten für die Bremer Kathedrale und deren Umkreis und wirkt gegenwärtig als sehr verdienstvoller Korrektor am Königlichen Athenäum; ein Mann, der sich durch Frömmigkeit, Bildung und viele andere Vorzüge auszeichnet, und den wir als Gönner und Freund überaus schätzen.

rechten. Die Ernte ist groß, aber der Arbeiter sind wenige. Obwohl die Mathematik ihren Mann großzügig ernährt, und viele erklären, einen Brotberuf erlernen zu wollen, verfallen diese Studien bei uns immer mehr. Das kommt wohl daher, daß die meisten eiteln Dingen nachgehen, oder solchen, die schön aussehen, an denen man nur zu naschen braucht. Vor der eigentlichen Arbeit aber, die

zur Ausbildung eines geschulten Geistes gehört, scheuen sie zurück. Doch verspreche ich mir von Ihrem Wirken durch Wort und Beispiel, sowie von dem einiger anderer Männer Ihrer Art eine Besserung der Verhältnisse für die Zukunft. Leben Sie wohl!

Gegeben zu Hannover am 17. Mai  
1698      Ihr sehr ergebener  
Gottfried Wilhelm Leibniz



#### QUELLENANGABEN

Handschriftliche Aufzeichnung von Gottfried Wilhelm Leibniz, datiert vom 15. März 1679, aus den Beständen der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover. Die Reproduktionsvorlagen der drei Manuskriptseiten wurden uns dankenswerterweise von der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover zur Verfügung gestellt.

Gottfried Wilhelm Leibniz: Explication de l'Arithmétique Binaire, 1703. In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, 1705.

Gothofredi Guillelmi Leibnitii: Opera Omnia. Hrsg. von L. Dutens. Band 3: Opera Mathematica. Genf, 1768.

#### DIE AUTOREN

*Erich Hochstetter*, geb. 1888 († 1968). Dr. phil., Professor der Philosophie an der Universität Münster, Direktor der Leibniz-Forschungsstelle Münster, korresp. Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.

*Hermann-Josef Greve*, geb. 1903. Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Köln, Diplomkaufmann, Dr. rer. pol., Direktor i. H. Saarbergwerke AG, Saarbrücken.

*Heinz Gumin*, geb. 1928. Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten Berlin, Tübingen und Münster, Dr. rer. nat., Honorarprofessor für mathematische Logik und Informationsverarbeitung an der Technischen Hochschule München, Abteilungsdirektor der Siemens Aktiengesellschaft, Werk für Datenverarbeitung.

#### DIE ÜBERSETZER

Für den lateinischen Teil: *Pater Franz X. Wernz S. J.*, München.

Für den französischen Teil: *Dr. Rudolf Soellner*, München.

